Упражнения по гомологической алгебре к 13 декабря

Пусть $\mathcal{A}$ — одна из следующих трех категорий:

а) конечнопрожденные модули над фробениусовой алгеброй A над полем $\mathbf{k}$;

б) конечнопорожденные градуированные модули над внешней $\mathbf{k}$-алгеброй Λ;

в) конечнопорожденные модули над групповым кольцом $\mathbf{Z}[G]$ для конечной группы G.

Пусть $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ — полная подкатегория, состоящая из, соответственно, а) проективных, б) проективных, в) индуцированных модулей.

1. Докажите, что $\mathcal{I}$ состоит из, соответственно,

а) инъективных модулей;

б) свободных модулей;

в) коиндуцированных модулей.

2. Определим категорию $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ с теми же объектами, что и $\mathcal{A}$; далее, $Hom_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}(X, Y)$ есть факторгруппа $Hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$ по подгруппе морфизмов, пропускающихся через объект $\mathcal{I}$. Пусть $\mathcal{DI} \subset \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ — полная подкатегория производной категории, состоящая из комплексов (квазиизоморфных комплексам) объектов $\mathcal{I}$. Аналогично определяется факторкатегория $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})/\mathcal{DI}$. Вложение $\mathcal{A} \to \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ индуцирует функтор $\Phi: \mathcal{A}/\mathcal{I} \to \mathcal{D}^b(\mathcal{A})/\mathcal{DI}$. Наша цель — доказать, что Φ является эквивалентностью. Для начала докажите, что для каждого комплекса $K^\bullet \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ найдется n такое, что $K^\bullet[n]$ лежит в образе Φ. *Указание:* пусть $K^\bullet \to I^\bullet$ — (вообще говоря, неограниченная справа) резольвента. Пусть $n \gg 0$ и $X = \mathrm{Ker}(d: I^n \to I^{n+1})$. Тогда $K^\bullet[n] \simeq \Phi(X)$.

3. Функтор сдвига $T: K^\bullet \mapsto K^\bullet[1]$ на $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, очевидно, спускается на факторкатегорию $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})/\mathcal{DI}$. Определим функтор $T: \mathcal{A}/\mathcal{I} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ такой, что $\Phi T = T\Phi$. А именно, вложим $X \in \mathcal{A}$ в $I \in \mathcal{I}$ и положим $TX := Y = I/X$. Надо проверить корректность.

а) Пусть $0 \to X \to I' \to Y' \to 0$ — другая точная последовательность. Докажите, что найдутся морфизмы $u: I \to I'$ и $v: Y \to Y'$, составляющие коммутативную диаграмму с id: $X \to X$;

б) Проверьте, что для других u', v' с этими свойствами образы v и v' в $Hom_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}(Y, Y')$ совпадают. Следовательно, Y и Y' изоморфны в $\mathcal{A}/\mathcal{I}$;

в) Определите функтор $T: \mathcal{A}/\mathcal{I} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ такой, что $TX = Y$ (в частности, определите его на морфизмах), и докажите, что $\Phi T = T\Phi$;

г) Докажите, что $T: \mathcal{A}/\mathcal{I} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ — автоэквивалентность. *Указание:* есть точная последовательность $0 \to T^{-1}X \to I' \to X \to 0$.

4. Определим теперь *выделенные треугольники* в $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ так, чтобы Φ переводил их в выделенные треугольники в $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})/\mathcal{DI}$. Пусть $s: X \to Z$, и $0 \to X \to I \to TX \to 0$. Пусть C — расслоенная сумма I и Z над X, и $t: I \to C$, $r: Z \to C$ — канонические морфизмы. Докажите, что существует единственный морфизм $w: C \to TX$, делающий

коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & TX \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & {\scriptstyle id}\downarrow \\ C & \xrightarrow{w} & TX \end{array}$$

Будем называть образы треугольников $X \xrightarrow{s} Z \xrightarrow{r} C \xrightarrow{w} TX$ в $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ и изоморфные им *выделенными*. Докажите, что Φ от выделенного треугольника выделен.

5. Докажите, что Φ на морфизмах а) сюръективен; б) инъективен.

6. В случае в) пусть вложение $M \to N$ является вложением прямого слагаемого, если забыть действие G (т.е. в категории абелевых групп). Тогда говорят, что это вложение $\mathbf{Z}$-расщепимо. Двойственно, пусть сюръекция $X \to Y$ является проекцией на прямое слагаемое, если забыть действие G, т.е. $\mathbf{Z}$-*расщепима*. Пусть $I \in \mathcal{I}$. Докажите, что

а) всякий морфизм $M \to I$ продолжается до морфизма $N \to I$;

б) всякий морфизм $I \to Y$ поднимается до морфизма $I \to X$;

в) всякий $M \in \mathcal{A}$ обладает $\mathbf{Z}$-расщепимой резольвентой $M \to I^\bullet$ (т.е. $I^i \in \mathcal{I}$ и вложение $\mathrm{Im}(d_i)$ в I^{i+1} $\mathbf{Z}$-расщепимо), и такая резольвента однозначно определена с точностью до гомотопии.

7. Пусть $\mathcal{I}^\infty$ — категория *точных* (вообще говоря, неограниченных в обе стороны) комплексов объектов из $\mathcal{I}$ с гомотопическими классами морфизмов; в случае в) дополнительно требуется, чтобы комплекс был $\mathbf{Z}$-расщепим. Приведите пример комплекса из $\mathcal{I}^\infty$, не гомотопного нулю, в каждом из случаев а)–в).

8. Сопоставим комплексу $I^\bullet \in \mathcal{I}^\infty$ ядро $\mathrm{Ker}(d_0 :\ I^0 \to I^1)$.

а) Докажите, что класс $\mathrm{Ker}(d_0)$ в $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ корректно определен и задает функтор $\Psi :\ \mathcal{I}^\infty \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$;

б) Для $X \in \mathcal{A}$ выберем правую резольвенту $X \stackrel{\varepsilon}{\to} I^0 \to I^1 \to \dots$ и левую резольвенту $\dots \to J^{-2} \to J^{-1} \stackrel{\epsilon}{\to} X[1]$ и срастим их в комплекс $\dots \to J^{-1} \stackrel{\varepsilon\circ\epsilon}{\to} I^0 \to I^1 \to \dots$. Докажите, что эта конструкция корректно определяет функтор из $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ в $\mathcal{I}^\infty$;

в) Докажите, что функтор из б) и Ψ — взаимно обратные эквивалентности.

9. Докажите, что *когомологии Тэйта* модуля $X \in \mathcal{A}$ — это $\oplus_{n\in\mathbf{Z}} Hom_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}(\mathbf{k}, T^n X)$ в случаях а), б) и $\oplus_{n\in\mathbf{Z}} Hom_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}(\mathbf{Z}, T^n X)$ в случае в).

10. Напомним, что $\hat{H}^{-2}(G,\mathbf{Z}) = H_1(G,\mathbf{Z}) = G/[G,G]$. Докажите, что для подгруппы $H \subset G$ отображение Res: $G/[G,G] \to H/[H,H]$ двойственно следующему гомоморфизму двойственных групп:
$\mathrm{Hom}(H,\mathbf{C}^*) \to \mathrm{Hom}(G,\mathbf{C}^*) :\ \chi \mapsto \det(\mathrm{Ind}_H^G \chi)/\det(\mathrm{Ind}_H^G \mathbf{C})$ (*трансфер*).

11. Пусть $H \subset G$ — силовская p-подгруппа. Пусть $\hat{H}^q_{(p)}(G,M) \subset \hat{H}^q(G,M)$ — p-компонента (в разложении в циклические группы). Докажите, что Res: $\hat{H}^q_{(p)}(G,M) \to \hat{H}^q_{(p)}(H,M)$ — вложение.