Упражнения по гомологической алгебре к 20 декабря

Пусть K — конечное расширение Галуа поля L с группой Галуа G. Пусть $\mathrm{Br}_K(L)$ — подгруппа группы Брауэра поля L, состоящая из (классов) тех центральных простых алгебр, которые распадаются над K. Цель этого листка — построить изоморфизм $\mathrm{Br}_K(L) \simeq H^2(G, K^*)$.

1. Пусть $(g,h) \mapsto \delta_{g,h}$ — (нормализованный) 2-коцикл G с коэффициентами в K^*, т.е. $\delta_{fg,h} \cdot \delta_{f,g} = \delta_{f,gh} \cdot f(\delta_{g,h})$. На векторном пространстве $A = L[G] \otimes_L K$ введем произведение по правилам (элемент $1 \otimes \beta$ для краткости будет обозначаться β, а $g \otimes 1$ — g)

$$\beta \cdot \gamma = \beta\gamma;\; g \cdot \beta = g \otimes \beta;\; \beta \cdot g = g \otimes g(\beta);\; h \cdot g = hg \otimes \delta_{g,h}$$

а) Докажите, что это произведение ассоциативно;

б) Если записать это умножение в новом K-базисе $g \mapsto g' = g \cdot \gamma_g$, то структурные константы $h' \cdot g' = h'g' \cdot \delta'_{g,h}$ будут равны $\delta'_{g,h} = g(\gamma_h) \cdot \gamma_g \cdot \gamma_{gh}^{-1} \cdot \delta_{g,h}$.

Таким образом, когомологичные коциклы задают изоморфные алгебры. Заменяя исходный коцикл когомологичным, можно считать, что $\delta_{e,e} = 1$, и e является единицей алгебры A.

2. Докажите, что

а) коммутант подполя $K \subset A$ (т.е. множество элементов A, коммутирующих с K) совпадает с K;

б) центр A совпадает с L.

3. Пусть A' — K-алгебра, содержащая элементы g, между которыми выполнены те же соотношения, что и в A. Докажите, что

а) $\{g \in G\} \subset A'$ либо все линейно независимы над K, либо все равны нулю;

б) Алгебра A проста и центральна над L;

в) $A \otimes_L K \simeq \mathrm{Mat}_n(K)$ $(n = \dim_L K)$.

Соответствующий коцикл δ называется *нётеровой системой факторов* алгебры A.

4. Пусть B — произвольная центральная простая L-алгебра, распадающаяся над K. Тогда у алгебры B есть единственное с точностью до изоморфизма неприводимое представление ρ над полем K : $B \to \mathrm{Mat}_m(K)$, $b \mapsto M_b$. Значит, представление $\rho_g :\ b \mapsto g(M_b)$ ему изоморфно. Иными словами, для любых $g, h \in G$ найдется обратимая матрица $P_{g,h} \in \mathrm{Mat}_m(K)$ такая, что $\rho_g(b) = P_{g,h}\rho_h(b)P_{g,h}^{-1}$ для любого $b \in B$. Очевидно, можно выбрать эти матрицы (определенные с точностью до умножения на скаляр) так, чтобы $f(P_{g,h}) = P_{fg,fh}$. Заметим, что $\rho_f = P_{f,g}\rho_g P_{f,g}^{-1} = P_{f,g}P_{g,h}\rho_h P_{g,h}^{-1}P_{f,g}^{-1} = P_{f,g}P_{g,h}P_{f,h}^{-1}\rho_f P_{f,h}P_{g,h}^{-1}P_{f,g}^{-1}$, т.е. матрица $P_{f,g}P_{g,h}P_{f,h}^{-1}$ централизует неприводимое представление ρ_f. По лемме Шура эта матрица скалярна: $P_{f,g}P_{g,h}P_{f,h}^{-1} = c_{f,g,h} \in K^*$. Докажите, что

а) $c_{f,g,h}c_{f,h,j} = c_{f,g,j}c_{g,h,j}$ и $j(c_{f,g,h}) = c_{jf,jg,jh}$, т.е. c является ненормализованным 2-коциклом G с коэффициентами в K^*;

б) Если умножить матрицу $P_{g,h}$ на скаляр $k_{g,h} \in K^*$, то $c_{f,g,h}$ заменится на $c'_{f,g,h} = k_{f,g}k_{g,h}k^{-1}_{f,h}c_{f,g,h}$.

Итак, класс когомологий коцикла c корректно определен. Этот коцикл называется *брауэровой системой факторов* алгебры B.

5. Докажите, что брауэрову систему факторов алгебры A из задачи 1 можно выбрать так, что $c_{1,g,gh} = \delta_{g,h}$. Таким образом, соотношение между брауэровыми и нётеровыми системами факторов такое же, как между ненормализованными и нормализованными коциклами. Обе системы факторов задают один и тот же элемент в $H^2(G, K^*)$.

6. Докажите, что

а) Если $B = \mathrm{Mat}_m(L)$, то $c_{f,g,h} \equiv 1$;

б) Если у алгебры B брауэрова система факторов $c_{f,g,h}$, а у алгебры B' брауэрова система факторов $c'_{f,g,h}$, то у алгебры $B \otimes_L B'$ брауэрова система факторов $c_{f,g,h}c'_{f,g,h}$.

Таким образом, получаем гомоморфизм $\mathrm{Br}_K(L) \to H^2(G, K^*)$. Из предыдущей задачи вытекает его сюръективность.

7. Пусть центральная простая L-алгебра B распадается над K. Докажите, что

а) существует центральная простая L-алгебра B', эквивалентная B, содержащая K в качестве максимального подполя;

б) B' является *скрещенным произведением* K и G (как в задаче 1);

в) гомоморфизм $\mathrm{Br}_K(L) \to H^2(G, K^*)$ из предыдущей задачи инъективен.

8. Пусть $L \subset K' \subset K$ — промежуточное поле с группой Галуа G' (факторгруппой G). Имеется очевидное вложение $\mathrm{Br}_{K'}(L) \subset \mathrm{Br}_K(L)$. Докажите, что в когомологических терминах это вложение описывается как композиция естественных отображений $H^2(G', K'^*) \to H^2(G, K'^*) \to H^2(G, K^*)$.

9. Докажите, что все конечные тела коммутативны.