Упражнения по гомологической алгебре к Новому Году

1. Пусть p — простое число, G — p-группа (т.е. порядка p^n), и A — G-модуль такой, что $pA = 0$, т.е. $\mathbf{F}_p[G]$-модуль. Докажите, что следующие три условия эквивалентны:

а) $A = 0$; б) $H^0(G, A) = 0$; в) $H_0(G, A) = 0$.

В частности, если A — простой $\mathbf{F}_p[G]$-модуль, то $A = \mathbf{F}_p$ с тривиальным действием G.

2. Пусть G — p-группа, и A — конечный $\mathbf{Z}[G]$-модуль. Пусть $A = A_{(p)} \oplus A_p$ — разложение A (как абелевой группы) в прямую сумму p-компоненты и взаимно простой с p компоненты. Докажите, что

а) $A_{(p)} \subset A$ является $\mathbf{Z}[G]$-подмодулем;

б) Естественное отображение $\hat{H}^\bullet(G, A_{(p)}) \to \hat{H}^\bullet(G, A)$ — изоморфизм;

в) Если $\hat{H}^n(G, \mathbf{F}_p) = 0$, то $\hat{H}^q(G, A) = 0$ для $q \geq n$.

3. Пусть в условиях задачи 1 дополнительно $H_1(G, A) = 0$. Докажите, что A — свободный $\mathbf{F}_p[G]$-модуль.

4. Докажите, что в условиях задачи 1 следующие утверждения эквивалентны:

а) A — свободный $\mathbf{F}_p[G]$-модуль;

б) A — индуцированный модуль;

в) $\hat{H}^\bullet(H, A) = 0$ для всех подгрупп $H \subset G$;

г) $\hat{H}^q(G, A) = 0$ для некоторого целого q.

5. Пусть G — p-группа, и A — G-модуль без p-кручения (т.е. умножение на p инъективно в A). Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

а) $\hat{H}^\bullet(H, A) = 0$ для всех подгрупп $H \subset G$;

б) $\hat{H}^q(G, A) = 0 = \hat{H}^{q+1}(G, A)$ для некоторого целого q;

в) A/pA — свободный $\mathbf{F}_p[G]$-модуль.

6. Пусть A — $\mathbf{Z}[G]$-модуль, свободный над $\mathbf{Z}$ и удовлетворяющий эквивалентным условиям предыдущей задачи. Пусть B — $\mathbf{Z}[G]$-модуль без кручения. Докажите, что G-модуль $M = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(A, B)$ *когомологически тривиален*, т.е. $\hat{H}^\bullet(H, M) = 0$ для всех подгрупп $H \subset G$.

7. Пусть A — $\mathbf{Z}[G]$-модуль, свободный над $\mathbf{Z}$, а $G_p \subset G$ — силовская p-подгруппа. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

а) A — проективный $\mathbf{Z}[G]$-модуль;

б) Для каждого простого числа p модуль A над G_p удовлетворяет эквивалентным условиям задачи 5.

Указание: надо использовать задачу 11 из предыдущего листочка про когомологии Тэйта.

8. Докажите эквивалентность следующих свойств для произвольного G-модуля A:

а) A когомологически тривиален, т.е. $\hat{H}^\bullet(H, A) = 0$ для всех подгрупп $H \subset G$;

б) Для каждого простого числа p найдется целое q такое, что $\hat{H}^q(G_p, A) = 0 = \hat{H}^{q+1}(G_p, A)$;

в) Есть проективная $\mathbf{Z}[G]$-резольвента $0 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$.

9. Вычислите когомологии Тэйта $\hat{H}^\bullet(\Sigma_3, \mathbf{Z})$ симметрической группы Σ_3.