Упражнения по гомологической алгебре к Рождеству

Пусть π — дискретная группа, а $\hat{\pi}$ — ее проконечное пополнение, т.е. обратный предел конечных факторгрупп π (компактная топологическая группа с топологией обратного предела). Пусть M — конечный модуль над π и, соответственно, над $\hat{\pi}$. Цель этого листочка — доказать, что естественное отображение $\pi \to \hat{\pi}$ индуцирует изоморфизм $H^\bullet(\hat{\pi}, M) \to H^\bullet(\pi, M)$ во многих случаях, например, если $\pi = \pi_1(X)$ для многих комплексных алгебраических многообразий X.

1. Пусть $\mathbf{G}$ — проконечная группа (т.е. компактная топологическая группа, в которой открытыми окрестностями единицы являются подгруппы конечного индекса, а естественное отображение $\mathbf{G} \to \hat{\mathbf{G}}$ — изоморфизм), а G — дискретная группа, и $G \to \mathbf{G}$ — гомоморфизм с плотным образом. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

A_n: естественное отображение $H^q(\mathbf{G}, M) \to H^q(G, M)$ биективно при $q \le n$ и инъективно при $q = n+1$ для произвольного конечного $\mathbf{G}$-модуля M;

B_n: естественное отображение $H^q(\mathbf{G}, M) \to H^q(G, M)$ сюръективно при $q \le n$;

C_n: для любого $h \in H^q(G, M)$, $1 \le q \le n$, найдется конечный $\mathbf{G}$-модуль M', содержащий M, такой что образ h в $H^q(G, M')$ равен нулю;

D_n: для любого $h \in H^q(G, M)$, $1 \le q \le n$, найдется подгруппа $G' \subset G$, являющаяся прообразом открытой подгруппы в $\mathbf{G}$, такая что $\mathrm{Res}_G^{G'} h = 0$.

Указание: для вывода C_n из D_n можно взять $M' = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[G']}(\mathbf{Z}[G], M)$.

2. Докажите, что $A_0, \ldots, D_0$ выполнены всегда, а $A_1, \ldots, D_1$ выполнены, если $G \to \mathbf{G} = \hat{G}$ — естественное отображение в проконечное пополнение.

3. Рассмотрим $G = PGL_2(\mathbf{C})$ с *дискретной* топологией. Докажите, что $\hat{G} = \{1\}$, но $H^2(G, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \neq 0$ (так как $1 \to \{\pm 1\} \to SL_2(\mathbf{C}) \to PGL_2(\mathbf{C}) \to 1$ — нетривиальное центральное расширение). Таким образом, G не обладает свойством A_2.

4. Пусть $\mathbf{G}' \subset \mathbf{G}$ — открытая подгруппа, а $G' \subset G$ — ее прообраз в G. Докажите, что $G \to \mathbf{G}$ обладает свойством A_n тогда и только тогда, когда $G' \to \mathbf{G}'$ обладает этим свойством.

5. Пусть $1 \to H \to E \to G \to 1$ — точная последовательность групп, и каноническое отображение $G \to \hat{G}$ обладает свойством A_2. Пусть H конечна, а I — централизатор H в E. Докажите, что

а) I имеет конечный индекс в E;

б) Найдется подгруппа E' конечного индекса в E, т.ч. $E' \cap H = \{1\}$;

в) естественное отображение $I/(I \cap H)$ в ее проконечное пополнение обладает свойством A_2.

6. Пусть $1 \to H \to E \to G \to 1$ — точная последовательность групп, и каноническое отображение $G \to \hat{G}$ обладает свойством A_2. Пусть

группа H конечного типа (т.е. задается конечным числом образующих и соотношений). Докажите, что

а) Всякая подгруппа конечного индекса в H содержит подгруппу вида $E' \cap H$, где E' — подгруппа конечного индекса в E;

б) Последовательность проконечных пополнений $1 \to \hat{H} \to \hat{E} \to \hat{G} \to 1$ точна.

7. Назовем группу G *хорошей*, если свойство A_n выполнено для канонического отображения $G \to \hat{G}$ и всех n. В условиях предыдущей задачи предположим, что H и G хорошие, и $H^q(H, M)$ конечны для любого конечного E-модуля M. Докажите, что E тоже хороша. *Указание*: сравните спектральные последовательности Серра-Хохшильда для расширения $1 \to H \to E \to G \to 1$ и пополненного.

8. Докажите, что а) свободная группа хороша;

б) последовательное расширение свободных групп хорошо.

9. Докажите, что группа $SL_2(\mathbf{Z})$ хороша.