Упражнения по гомологической алгебре к 11 октября

1. Пусть O — кольцо целых поля алгебраических чисел K. Докажите, что

а) любой идеал $I \subset O$ проективен, и любой проективный O-модуль имеет вид $I_1 \oplus \ldots \oplus I_k$;

б) два модуля $I_1 \oplus \ldots \oplus I_k$ и $J_1 \oplus \ldots \oplus J_r$ изоморфны тогда и только тогда, когда $k = r$ и классы идеалов $I_1 \ldots I_k$ и $J_1 \ldots J_r$ совпадают.

2. Пусть A — модуль над дискретной группой G. Проверьте, что

а) 1-коцикл G с коэффициентами в A — это *скрещенный гомоморфизм*, т.е. отображение $\phi: G \to A$ т.ч. $\phi(gg') = g\phi(g') + \phi(g)$; и ϕ является кограницей, если существует $a \in A$ т.ч. $\phi(g) = ga - a$. В частности, если G тривиально действует в A, то $H^1(G, A) = Hom(G, A)$ (гомоморфизм групп);

б) $H^1(G, A)$ есть множество классов изоморфизма точных троек G-модулей $0 \to \mathbf{Z} \to M \to A \to 0$ (относительно изоморфизмов, тождественных на $\mathbf{Z}$ и A);

в) 2-коцикл G с коэффициентами в A — это *система факторов*, т.е. отображение $\psi: G \times G \to A$ т.ч. $g_1\psi(g_2, g_3) - \psi(g_1g_2, g_3) + \psi(g_1, g_2g_3) - \psi(g_1, g_2) = 0$. Далее, $H^2(G, A)$ есть множество классов изоморфизма расширений групп $1 \to A \to H \to G \to 1$, где A является абелевым нормальным делителем в H, а действие G на A осуществляется внутренними автоморфизмами в H (относительно изоморфизмов, тождественных на G и A). В частности, если G тривиально действует в A, такие расширения называются *центральными*.

3. Пусть A, B — модули над (комплексной) алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Проверьте, что

а) $H_1(\mathfrak{g}, \mathbf{C}) = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Далее, $H^1(\mathfrak{g}, Hom(A, B))$ есть множество классов изоморфизма точных троек $\mathfrak{g}$-модулей $0 \to A \to M \to B \to 0$, т.е. *расширений B с помощью A*;

б) $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ (относительно присоединенного действия) есть пространство *внешних дифференцирований* $\mathfrak{g}$ (т.е. факторпространство всех дифференцирований $\phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ т.ч. $\phi[g, h] = [\phi(g), h] + [g, \phi(h)]$, по подпространству *внутренних дифференцирований* $\phi_g(h) = [g, h]$).

в) $H^2(\mathfrak{g}, \mathbf{C})$ есть множество классов изоморфизма центральных расширений $0 \to \mathbf{C} \to \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \to 0$. В частности, имеется *универсальное центральное расширение* $0 \to H_2(\mathfrak{g}, \mathbf{C}) \to \widetilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \to 0$;

г) $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ (относительно присоединенного действия) есть множество классов изоморфизма *инфинитезимальных деформаций алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, т.е. структур алгебры Ли на $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}[t]/t^2$ т.ч. $\hat{\mathfrak{g}} \pmod t \equiv \mathfrak{g}$.

Короче, "Когомологии, как производные: первая — скорость, вторая — ускорение, а высшие физического смысла не имеют" (И.М.Гельфанд)

4. Пусть $\mathfrak{g}$ — абелева алгебра Ли. Вычислите $H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathbf{C}), H_\bullet(\mathfrak{g}, \mathbf{C})$. Постройте (явной формулой) универсальное центральное расширение $\widetilde{\mathfrak{g}}$

(*алгебра Гейзенберга*).

5. Комплекс Шевалле $C^\bullet(\mathfrak{g}, A)$ состоит из $\mathfrak{g}$-модулей, и дифференциал согласован с действием $\mathfrak{g}$. Отсюда возникает действие $\mathfrak{g}$ на $H^\bullet(\mathfrak{g}, A)$. Докажите, что это действие тривиально. Докажите аналогичный результат для гомологий. Докажите аналогичный результат для (ко)гомологий дискретных групп.

6. Пусть $\dim \mathfrak{g} = n$. Тогда $\dim C_n(\mathfrak{g}, \mathbf{C}) = 1$. Предположим, что $C_n(\mathfrak{g}, \mathbf{C}) \ni f \neq 0$ является циклом, т.е. $H_n(\mathfrak{g}, \mathbf{C}) \neq 0$ ($\mathfrak{g}$ *унитарна*). Докажите, что спаривание $C^k(\mathfrak{g}, \mathbf{C}) \times C^{n-k}(\mathfrak{g}, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$, $(a, b) \mapsto ab(f)$, пропускается через *невырожденное* спаривание $H^k(\mathfrak{g}, \mathbf{C}) \times H^{n-k}(\mathfrak{g}, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$. Таким образом, для унитарных алгебр Ли (например, абелевых) имеется естественный изоморфизм $H^k(\mathfrak{g}, \mathbf{C}) = H^{n-k}(\mathfrak{g}, \mathbf{C})^\vee = H_{n-k}(\mathfrak{g}, \mathbf{C})$ (*двойственность Пуанкаре*).