Упражнения по гомологической алгебре к 18 октября

1. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли с подалгеброй Картана $\mathfrak{h}$ и системой корней $R \subset \mathfrak{h}^\vee$ и простых корней $I \subset R^+$. Пусть $n = \dim \mathfrak{h} = \sharp I$, и $c \in W$ — элемент Коксетера в группе Вейля — имеет порядок h (число Коксетера).

а) Докажите, что $\dim \mathfrak{g} = (h+1)n$;

б) Вычислите h для всех диаграмм Дынкина;

в) Пусть $\gamma \in R^+$ — старший корень, и $\gamma = \sum_{i \in I} c_i \alpha_i$ — его разложение в базисе простых корней. Докажите, что $h = 1 + \sum_{i \in I} c_i$.

2. Напомним, что длина $l(w)$, $w \in W$, — это минимальная длина разложения w в произведение простых отражений. Докажите, что

а) $l(w) = \sharp(R^- \cap wR^+)$;

б) Существует единственный элемент w_0 максимальной длины, $l(w_0) = \sharp(R^+)$; он переводит все положительные корни в отрицательные.

в) Перечислите все диаграммы Дынкина, для которых $w_0 = -1$ (как линейный оператор в $\mathfrak{h}^\vee$);

г) Докажите, что если $w_0 = -1$, то $w_0 = c^{\frac{h}{2}}$;

д) Пусть $\sharp(R^+) = \nu$, и $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_\nu}$ — какое-нибудь разложение. Докажите, что последовательность $(\alpha^1, \dots, \alpha^\nu)$, $\alpha^k = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$, содержит все положительные корни ровно по одному разу.

3. Пусть Γ — колчан типа A, D, E. Докажите, что найдется $+$-допустимая последовательность вершин $(i_\nu, \dots, i_1)$ такая, что $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_\nu}$. Значит, последовательность $(M^1, \dots, M^\nu)$, $M^k = R^+_{i_1} \circ R^+_{i_2} \circ \ldots \circ R^+_{i_{k-1}}(M_{i_k})$ содержит все неразложимые представления Γ ровно по одному разу.

4. Пусть $1 \le k < l \le \nu$. Докажите, что

а) $Hom(M^l, M^k) = 0$;

б) Всякая точная последовательность вида $0 \to M^l \to M \to M^k \to 0$ расщепляется, то есть $M = M^l \oplus M^k$. Иными словами, $Ext^1(M^k, M^l) = 0$.

5. Пусть $R^\vee \subset \mathfrak{h}$ — дуальная система корней, и $\gamma^\vee \in R^\vee$ — кокорень, двойственный старшему корню. Пусть $Kill(\cdot,\cdot)$ — ограничение формы Киллинга на $\mathfrak{h}$. *Дуальное число Коксетера* $h^\vee$ определяется так: $Kill(\gamma^\vee, \gamma^\vee) = 4h^\vee$. Пусть $\beta^\vee \in R^\vee$ — старший кокорень, а $\beta \in R$ — двойственный корень, $\beta = \sum_{i \in I} b_i \alpha_i$. Докажите, что $h^\vee = 1 + \sum_{i \in I} b_i$. Вычислите $h^\vee$ для всех диаграмм Дынкина. В частности, $h^\vee \le h$, и равенство достигается только для типов A, D, E, когда $\beta = \gamma$.