Упражнения по гомологической алгебре к 1 ноября

1. Пусть $A = T(V)/(R)$ — квадратичная алгебра, а $K^\bullet = \ldots \to K^2 \to K^1 \to K^0 = A \otimes {}^*A^!$ — ее комплекс Кошуля. Проверьте, что он может быть определен следующим эквивалентным образом. Для $0 < i < n$ положим $W_i = V^{\otimes i-1} \otimes R \otimes V^{\otimes n-i-1} \subset V^{\otimes n}$, и $K_n^n = \bigcap_{0<i<n} W_i$ (например, $K_0^0 = \mathbf{C},\ K_1^1 = V,\ K_2^2 = R$). Далее, положим $K^n = A \otimes K_n^n$ с градуировкой $K_{n+m}^n = A_m \otimes K_n^n$ и определим дифференциал $d:\ K^n \to K^{n-1}$ как ограничение отображения $A \otimes V^{\otimes n} \to A \otimes V^{\otimes n-1},\ a \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto av_1 \otimes \ldots \otimes v_n$.

2. Для произвольного набора линейных подпространств $W_1, \ldots, W_m \subset W$ определим его комплекс Кошуля $K^\bullet(W)$: для $0 \le i \le m+1$ положим $K^i(W) = W_1 \cap \ldots \cap W_{i-1}/(W_1 \cap \ldots \cap W_{i-1} \cap (W_{i+1} + W_{i+2} + \ldots + W_m))$ с очевидными отображениями $d:\ K^i(W) \to K^{i-1}(W)$; например, $K^{m+1}(W) = W_1 \cap \ldots \cap W_m,\ K^1(W) = W/(W_2 + \ldots + W_m),\ K^0(W) = W/(W_1 + \ldots + W_m)$. Докажите, что комплекс Кошуля $K^\bullet$ квадратичной алгебры $A = T(V)/(R)$ разлагается в прямую сумму $K^\bullet = \bigoplus_{n \ge 0} K^\bullet(V^{\otimes n})$ (для наборов подпространств соотношений, введенных в задаче 1.)

3. Набор подпространств $V_\alpha \subset V$ называется *решеткой*, если он замкнут относительно операций суммы и пересечения. Произвольный набор подпространств можно дополнить до решетки, беря последовательно всевозможные суммы и пересечения. Решетка называется *дистрибутивной*, если $V_\alpha \cap (V_\beta + V_\gamma) = (V_\alpha \cap V_\beta) + (V_\alpha \cap V_\gamma)$ для любых трех подпространств. Докажите, что решетка дистрибутивна тогда и только тогда, когда есть базис (v_i) пространства V такой, что всякое V_α натянуто на некоторое подмножество этого базиса.

4. Докажите, что если набор линейных подпространств $W_1, \ldots, W_m \subset W$ порождает дистрибутивную решетку, то комплекс Кошуля $K^\bullet(W)$ точен.

5. Пусть $x_1, \ldots, x_l$ — базис V, и $R_S \subset V \otimes V$ натянуто на тензорные произведения $x_i \otimes x_j,\ (i,j) \notin S \subset \{1, \ldots, l\}^2$. Докажите, что квадратичная алгебра $A = T(V)/(R_S)$ кошулева.

6. Пусть задано подмножество $S \subset \{1, \ldots, l\}^2$ и введен лексикографический порядок на этом множестве пар. Пусть задано пространство V с базисом $x_1, \ldots, x_l$ и подпространство соотношений $R \subset V \otimes V$ такое, что $x_i \otimes x_j \pmod R$ линейно выражается через (лексикографически) меньшие тензорные произведения тогда и только тогда, когда $(i,j) \notin S$ (соответственно, $\{x_i \otimes x_j,\ (i,j) \in S\}$ образует базис в $V^{\otimes 2}/R$). Для $n \ge 2$ положим $\{1, \ldots, l\}^n \supset S^{(n)} = \{(i_1, \ldots, i_n)$ т.ч. $(i_1, i_2) \in S, (i_2, i_3) \in S, \ldots, (i_{n-1}, i_n) \in S\}$. Если мономы $x^\alpha,\ \alpha \in S^{(n)}, n \ge 2$, образуют базис в квадратичной алгебре $A = T(V)/(R)$, то она называется *PBW-алгеброй*, а базис — *PBW-базисом*. Докажите, что PBW-алгебра кошулева. Указание: введите на комплексе Кошуля такую фильтрацию, что присоединенный градуированный комплекс является комплексом Кошуля для

алгебры из предыдущей задачи.

7. Алгебра Орлика-Соломона OS_n задается антикоммутирующими образующими y_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$, и соотношениями $y_{ij}y_{jk} - y_{ik}y_{jk} - y_{ij}y_{ik} = 0$, $1 \leq i < j < k \leq n$. Постройте PBW-базис (для начала введите порядок на множестве образующих).

8. Пусть $\dim V = 2 = \dim R$. Опишите все $R \subset V^{\otimes 2}$ такие, что $A = T(V)/(R)$ кошулева.