Упражнения по гомологической алгебре к 8 ноября

1. а) Докажите, что $\mathbf{Z}$-модули $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ и $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ инъективны;

б) Пусть Q — модуль над кольцом A. Предположим, что для всякого левого идеала $J \subset A$ любой гомоморфизм $\phi: J \to Q$ может быть продолжен до гомоморфизма $\tilde{\phi}: A \to Q$. Докажите, что Q инъективен;

в) Рассмотрим A-модуль $A^\vee := Hom_{\mathbf{Z}}(A, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$, $af(x) := f(xa)$ для $a \in A$, $f \in A^\vee$. Докажите, что $A^\vee$ инъективен;

г) Докажите, что всякий A-модуль M можно вложить в инъективный A-модуль. Указание: нужно вложить M в прямое произведение (бесконечного числа экземпляров) модулей $A^\vee$ и доказать, что $\Pi A^\vee$ инъективен.

2. Докажите, что если $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ — точная последовательность предпучков, и $\mathcal{F}, \mathcal{H}$ — пучки, то $\mathcal{G}$ тоже является пучком.

3. Для пучков $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ определим предпучок $\mathcal{H} = \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ как $\mathcal{H}(U) = Hom(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$. Докажите, что $\mathcal{H}$ является пучком.

4. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств; $\mathcal{F}$ — пучок на X, а $\mathcal{G}$ — пучок на Y. Постройте естественные отображения $f^{-1}f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ и $\mathcal{G} \to f_*f^{-1}\mathcal{G}$ и докажите, что функтор f^{-1} сопряжен слева к функтору f_*.

5. Пучок $\mathcal{F}$ на X называется *вялым*, если для любого открытого $U \subset X$ отображение ограничения $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ сюръективно. Докажите, что любой пучок вкладывается в некоторый вялый пучок, и что все инъективные пучки вялые.

6. Докажите, что если $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ — точная последовательность пучков, и $\mathcal{F}$ вялый, то для любого открытого U последовательность $0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{G}) \to \Gamma(U, \mathcal{H}) \to 0$ точна. Докажите, что если в этой последовательности $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ вялые, то и $\mathcal{H}$ тоже вялый.

7. Пусть X паракомпактно (т.е. у каждого открытого покрытия есть локально конечное подпокрытие). Пучок $\mathcal{F}$ на X называется *мягким*, если для любого замкнутого $Z \subset X$ отображение ограничения $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(Z, \mathcal{F})$ в ростки $\mathcal{F}$ на Z сюръективно. Докажите, что любой вялый пучок мягок. Докажите, что если $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ — точная последовательность пучков, и $\mathcal{F}$ мягкий, то для любого замкнутого Z последовательность $0 \to \Gamma(Z, \mathcal{F}) \to \Gamma(Z, \mathcal{G}) \to \Gamma(Z, \mathcal{H}) \to 0$ точна. Докажите, что если в этой последовательности $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ мягкие, то и $\mathcal{H}$ тоже мягкий.

8. Пусть s — сечение пучка $\mathcal{F}$ на X, а (U_α) — открытое покрытие X. Разложением сечения s, подчиненным покрытию (U_α), называется набор сечений s_α пучка $\mathcal{F}$ над открытыми множествами $V_\alpha \subset U_\alpha$, который локально конечен (т.е. для любой точки $x \in X$ лишь конечное число ростков $(s_\alpha)_x$ отлично от 0), и $s_x = \sum (s_\alpha)_x$ для любой $x \in X$. Докажите, что если X паракомпактно, а $\mathcal{F}$ мягкий, то для любого сечения $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ и любого покрытия (U_α) существует разложение s, подчи-

ненное (U_α). Докажите, что если $\mathcal{F}$ является мягким пучком колец, то любой пучок $\mathcal{F}$-модулей является мягким.

9. Пучок $\mathcal{F}$ на паракомпактном X называется *тонким*, если для любых непересекающихся замкнутых $Z, Y \subset X$ найдется эндоморфизм $\phi: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, индуцирующий нулевое отображение на некоторой окрестности Z и тождественное отображение на некоторой окрестности Y. Докажите, что любой тонкий пучок мягок. Докажите, что $\mathcal{F}$ тонок тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ мягок. Докажите, что пучок непрерывных (а также гладких) функций на многообразии X тонок.

10. Докажите, что свойства вялости, мягкости и тонкости являются локальными: например, пучок $\mathcal{F}$ на X вялый тогда и только тогда, когда у каждой точки $x \in X$ есть окрестность U, для которой $\mathcal{F}|_U$ вял.