Упражнения по гомологической алгебре к 8 ноября

1. а) Пусть комплекс мягких пучков $0 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \dots$ точен (ацикличен). Докажите, что глобальные сечения с индуцированными отображениями тоже образуют точный комплекс $0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}_0) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \to \dots$;

б) Пусть $\mathcal{F}$ — мягкий пучок. Докажите, что $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ при $i > 0$. Иными словами, $R\Gamma(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Цель следующих упражнений — доказать обобщение предыдущих утверждений: пусть $K^\bullet = 0 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \dots$ — комплекс мягких пучков. Тогда $R\Gamma(K^\bullet) = 0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}_0) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \to \dots$.

2. Пусть $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ — точная последовательность пучков, и $\mathcal{F} \to I^\bullet_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{G} \to I^\bullet_{\mathcal{G}}$, $\mathcal{H} \to I^\bullet_{\mathcal{H}}$ — их инъективные резольвенты. Точной последовательностью резольвент $0 \to I^\bullet_{\mathcal{F}} \to I^\bullet_{\mathcal{G}} \to I^\bullet_{\mathcal{H}} \to 0$ называется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & I^1_{\mathcal{F}} \arrow[r] \arrow[u] & I^1_{\mathcal{G}} \arrow[r] \arrow[u] & I^1_{\mathcal{H}} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^0_{\mathcal{F}} \arrow[r] \arrow[u] & I^0_{\mathcal{G}} \arrow[r] \arrow[u] & I^0_{\mathcal{H}} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами. Пусть фиксированы инъективные резольвенты $\mathcal{F} \to I^\bullet_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{H} \to I^\bullet_{\mathcal{H}}$. Докажите, что найдется инъективная резольвента $\mathcal{G} \to I^\bullet_{\mathcal{G}}$, включающаяся в точную последовательность $0 \to I^\bullet_{\mathcal{F}} \to I^\bullet_{\mathcal{G}} \to I^\bullet_{\mathcal{H}} \to 0$ (в частности, почленно, $I^\bullet_{\mathcal{G}} = I^\bullet_{\mathcal{F}} \oplus I^\bullet_{\mathcal{H}}$).

3. Пусть

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}' \arrow[r] & \mathcal{G}' \arrow[r] & \mathcal{H}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

коммутативная диаграмма с точными строками; $0 \to I^\bullet_{\mathcal{F}} \to I^\bullet_{\mathcal{G}} \to I^\bullet_{\mathcal{H}} \to 0$,
$0 \to I^\bullet_{\mathcal{F}'} \to I^\bullet_{\mathcal{G}'} \to I^\bullet_{\mathcal{H}'} \to 0$ — соответствующие точные последовательности инъективных резольвент. Докажите, что существуют морфизмы

комплексов F, G, H, продолжающие f, g, h и включающиеся в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I^\bullet_{\mathcal{F}} & \longrightarrow & I^\bullet_{\mathcal{G}} & \longrightarrow & I^\bullet_{\mathcal{H}} & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle F}\big\downarrow & & {\scriptstyle G}\big\downarrow & & {\scriptstyle H}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I^\bullet_{\mathcal{F}'} & \longrightarrow & I^\bullet_{\mathcal{G}'} & \longrightarrow & I^\bullet_{\mathcal{H}'} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Более того, если F', G', H' — другая тройка морфизмов с этим же свойством, и ϕ, χ — гомотопии между F, F' и H, H', то существует гомотопия γ между G, G', делающая коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I^n_{\mathcal{F}} & \longrightarrow & I^n_{\mathcal{G}} & \longrightarrow & I^n_{\mathcal{H}} & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \phi}\big\downarrow & & {\scriptstyle \gamma}\big\downarrow & & {\scriptstyle \chi}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I^{n-1}_{\mathcal{F}'} & \longrightarrow & I^{n-1}_{\mathcal{G}'} & \longrightarrow & I^{n-1}_{\mathcal{H}'} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

4. *Бикомплекс* $(L^{\bullet\bullet}, d', d'')$ — это набор дифференциалов $d'_{ij} : L^{ij} \to L^{i+1,j}$, $d''_{ij} : L^{ij} \to L^{i,j+1}$ с условиями $(d')^2 = 0$, $(d'')^2 = 0$, $d'd'' + d''d' = 0$. Соответствующий *тотальный комплекс* $Tot(L^{\bullet\bullet})$ определяется как $Tot^n := \oplus_{i+j=n} L^{ij}$, $d := d' + d''$. *Резольвентой Картана-Эйленберга* комплекса $K^\bullet = 0 \to K^0 \to K^1 \to K^2 \to \ldots$ называется бикомплекс $(I^{\bullet\bullet}, d', d'')$ с морфизмом аугментации $\varepsilon : K^\bullet \to I^{\bullet,0}$ такой, что $I^{ij} = 0$, если $i < 0$ или $j < 0$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) все I^{ij} инъективны;

б) все комплексы $0 \to K^i \to I^{i,0} \to I^{i,1} \to \ldots$, $0 \to Im(d^K_i) \to Im(d'_{i,0}) \to Im(d'_{i,1}) \to \ldots$, $0 \to Ker(d^K_i) \to Ker(d'_{i,0}) \to Ker(d'_{i,1}) \to \ldots$, $0 \to H^i(K^\bullet) \to Ker(d'_{i,0})/Im(d'_{i-1,0}) \to Ker(d'_{i,1})/Im(d'_{i-1,1}) \to \ldots$ точны;

в) $Im(d'_{i-1,j})$ является прямым слагаемым $Ker(d'_{ij})$, которое, в свою очередь, является прямым слагаемым I^{ij} при любых i, j.

В частности, все $Im(d'_{ij}), Ker(d'_{ij}), Ker(d'_{ij})/Im(d'_{i-1,j})$ инъективны, и комплексы из б) являются инъективными резольвентами, соответственно, $K^i, Im(d^K_i), Ker(d^K_i), H^i(K^\bullet)$. Кроме того, ε индуцирует квазиизоморфизм $K^\bullet \to Tot(I^{\bullet\bullet})$.

Докажите существование резольвенты Картана-Эйленберга для любого комплекса $K^\bullet$.

5. *Гомотопия* h между двумя морфизмами бикомплексов $f, g : L^{\bullet\bullet} \to M^{\bullet\bullet}$ — это набор отображений $h'_{ij} : L^{ij} \to M^{i-1,j}$; $h''_{ij} : L^{ij} \to M^{i,j-1}$ такой, что $g - f = (d'+d'')(h'+h'') + (h'+h'')(d'+d'')$. В частности, $h = h' + h''$ является гомотопией между $Tot(f), Tot(g) : Tot(L^{\bullet\bullet}) \to Tot(M^{\bullet\bullet})$. Докажите, что любой морфизм комплексов $K^\bullet \to J^\bullet$ продолжается до морфизма их резольвент Картана-Эйленберга, и это продолжение определено однозначно с точностью до гомотопии. Докажите, что если два

морфизма $K^\bullet \to J^\bullet$ гомотопны, то любые их продолжения на резольвенты Картана-Эйленберга тоже гомотопны.

6. Докажите все же, что $\varepsilon: \ K^\bullet \to Tot(I^{\bullet\bullet})$ — квазиизоморфизм. Указание: надо доказать, что $Cone(\varepsilon)$ ацикличен. Заметим, что $Cone(\varepsilon) = Tot(L^{\bullet\bullet})$, где $L^{ij} = I^{ij}$ при $i \geq 0 \leq j$, $L^{i,-1} = K^i$, $L^{ij} = 0$ иначе. Обозначим $Tot^\bullet := Tot(L^{\bullet\bullet})$ и рассмотрим на комплексе $Tot^\bullet$ убывающую фильтрацию $F'_p(Tot^n) := \bigoplus_{i+j=n}^{i\geq p}$. Тогда присоединенный градуированный комплекс $(gr_{F'}Tot)^\bullet$ имеет вид $(gr_{F'}Tot)^n = \oplus_{i+j=n} L^{ij}$, $d = d''$. Так как по конструкции $I^{\bullet\bullet}$ его столбцы являлись резольвентами K^i, заключаем, что $(gr_{F'}Tot)^\bullet$ точен. Отсюда выводится точность $Tot^\bullet$.

7. Докажите, что если $K^\bullet = 0 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \ldots$ — комплекс мягких пучков, то $R\Gamma(K^\bullet) = 0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}_0) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \to \ldots$ Указание: пусть $I^{\bullet\bullet}$ — резольвента Картана-Эйленберга комплекса $K^\bullet$. Тогда по определению (и по предыдущей задаче) $R\Gamma(X, K^\bullet) = \Gamma(X, Tot(I^{\bullet\bullet}))$. Надо доказать, что ε индуцирует квазиизоморфизм $\Gamma(\varepsilon): \Gamma(X, K^\bullet) \to \Gamma(X, Tot(I^{\bullet\bullet}))$. Следуйте указанию из предыдущей задачи и пользуйтесь задачей 1.