Упражнения по гомологической алгебре к 15 ноября

1. Точной парой называется набор из двух модулей D, E (над кольцом R) и трех гомоморфизмов i, j, k, образующих точную последовательность $\ldots \to D \xrightarrow{i} D \xrightarrow{j} E \xrightarrow{k} D \xrightarrow{i} D \to \ldots$ В частности, $0 = (jk)^2 : E \to E$, так что определена когомология $H(E, jk) = \mathrm{Ker}(jk)/\mathrm{Im}(jk)$. Производная пара $\ldots \to D' \xrightarrow{i'} D' \xrightarrow{j'} E' \xrightarrow{k'} D' \xrightarrow{i'} D' \to \ldots$ строится так: $D' = \mathrm{Im}(i)$, $E' = H(E, jk)$, i', j', k' индуцируются i, j, k:

i' — ограничение i на $\mathrm{Im}(i) \subset D$;

$j'(i(x))$ — класс $j(x)$ в $H(E, jk)$, $x \in D$;

$k'(\text{класса } y) = k(y)$, $y \in E$, $jk(y) = 0$.

Докажите, что производная пара точной пары точна. Тем самым определена последовательность точных пар $P_r = (D_r, E_r, i_r, j_r, k_r)$: при $r = 1$ это исходная точная пара $P_1 = (D, E, i, j, k)$, а при $r \geq 1$ пара P_{r+1} является производной для P_r.

2. Предположим, что точная пара P_1 биградуирована, т.е. модули D, E биградуированы, $D = \bigoplus D^{p,q}$, $E = \bigoplus E^{p,q}$, а морфизмы i, j, k имеют бистепени, соответственно, $(-1, 1), (0, 0), (1, 0)$. Докажите, что производные пары P_r тоже биградуированы, а морфизмы i_r, j_r, k_r имеют бистепени $(-1, 1)$,
$(r-1, -r+1), (1, 0)$. Следовательно, $d_r = j_r k_r$ является дифференциалом в E_r бистепени $(r, -r+1)$, и его когомологии H_r изоморфны E_{r+1} с сохранением биградуировки. Таким образом, (E_r^{pq}, d_r) образуют *спектральную последовательность.*

3. В условиях предыдущей задачи рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & {} & & {} & \\
\cdots \arrow[r] & E^{p-2,q} \arrow[r, "k"] & D^{p-1,q} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q} \arrow[r, "k"] & D^{p,q} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "j"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E^{p-1,q-1} \arrow[r, "k"] & D^{p,q-1} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "j"] & E^{p,q-1} \arrow[r, "k"] & D^{p+1,q-1} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "j"] & \cdots \\
 & & {} \arrow[u, "i"] & & {} \arrow[u, "i"] &
\end{tikzcd}$$

Здесь каждая последовательность, состоящая из одного вертикального шага i, двух горизонтальных шагов j, k, нового вертикального шага i и т.д., является точной. При таком описании $E_r^{p,q}$ есть подфактор $E^{p,q}$, получающийся факторизацией $k^{-1}(\mathrm{Im}(i^{r-1}))$ по $j(\mathrm{Ker}(i^{r-1}))$ (где k^{-1} — полный прообраз при морфизме k). Опишите предел $E_\infty^{p,q}$ при $r \to \infty$.

4. Пусть $F^p K^\bullet$ — убывающая фильтрация комплекса $K^\bullet$.

а) Используя точные последовательности когомологий, отвечающие точным тройкам комплексов $0 \to F^{p+1}K^\bullet \to F^p K^\bullet \to F^p K^\bullet / F^{p+1} K^\bullet \to 0$, постройте биградуированную точную пару с $D^{p,q} = H^{p+q}(F^p K^\bullet)$, $E^{p,q} =$

$H^{p+q}(F^pK^\bullet/F^{p+1}K^\bullet)$ и морфизмами i,j,k бистепеней $(-1,1),(0,0),(1,0)$ соответственно. Спектральная последовательность этой точной пары есть *спектральная последовательность фильтрованного комплекса* $F^\bullet K^\bullet$.

б) Проверьте, что $E_r^{p,q}=Z_r^{p,q}/(Z_{r-1}^{p+1,q-1}+dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2})$, где $Z_r^{p,q}=d^{-1}(F^{p+r}K^{p+q+1})\cap F^pK^{p+q}$, а $d_r^{p,q}:\ E_r^{p,q}\to E_r^{p+r,q-r+1}$ индуцирован дифференциалом d комплекса $K^\bullet$.

5. Пусть в условиях предыдущей задачи фильтрация $F^\bullet$ на каждом члене комплекса K^n *конечна и регулярна*, т.е. $\exists p_+(n),p_-(n)$ т.ч. $F^{p_+(n)}K^n=K^n$, $F^{p_-(n)}K^n=0$. Докажите, что при $r\geq r_0(p,q):=\max(p_+(p+q+1)-p_-(p+q)+1,p_+(p+q)-p_-(p+q-1)+1)$ имеем $d_r^{p,q}=0$, $d_r^{p-r,q+r-1}=0$. Таким образом, в пределе $E_\infty^{p,q}=Z_r^{p,q}/Z_{r-1}^{p+1,q-1}$ при $r\geq r_0(p,q)$, и
$Z_r^{p,q}=\mathrm{Ker}(d|_{F^pK^{p+q}})$,
$Z_{r-1}^{p+1,q-1}=\mathrm{Ker}(d|_{F^{p+1}K^{p+q}})$ при $r>r_0(p,q)$.

Введем на $H^n:=H^n(K^\bullet)$ фильтрацию $F^pH^n=$образ$H^n(F^pK^\bullet)$ при естественном отображении $F^pK^\bullet\to K^\bullet$. Тогда для $n=p+q$ имеем $E_\infty^{p,q}=F^pH^n/F^{p+1}H^n$, т.е. $gr_FH^n=\bigoplus_{p+q=n}E_\infty^{p,q}$, т.е. *спектральная последовательность сходится к когомологиям* $H^\bullet(K^\bullet)$.

6. а) Рассмотрим *каноническую* фильтрацию комплекса $(F^pK^\bullet)^n=K^n$ при $n<-p$, $(F^pK^\bullet)^n=\mathrm{Ker}(d_n)$ при $n=-p$, $(F^pK^\bullet)^n=0$ при $n>-p$. Докажите, что соответствующая фильтрация на $H^n(K^\bullet)$ тривиальна: $F^pH^n=H^n$ при $n\leq -p$, $F^pH^n=0$ при $n>-p$. Докажите, что $E_1^{p,q}=H^p(K^\bullet)$ при $q=-2p$, $E_1^{p,q}=0$ при $q\neq -2p$, и $d_1^{p,q}=0$ при всех p,q. Таким образом, $d_r=0$ для всех $r\geq 1$ и $E_r^{p,q}=E_1^{p,q}$.

б) Рассмотрим *глупую* фильтрацию комплекса $(G^pK^\bullet)^n=0$ при $n<p$, $(G^pK^\bullet)^n=K^n$ при $n\geq p$. Докажите, что соответствующая фильтрация на $H^n(K^\bullet)$ тривиальна: $G^pH^n=H^n$ при $p\leq n$, $G^pH^n=0$ при $p>n$. Докажите, что $E_r^{p,q}=0$ при $q\neq 0$, $E_r^{p,q}=K^p$ при $q=0,r=1$, $E_r^{p,q}=H^p(K^\bullet)$ при $q=0,2\leq r\leq\infty$. Наконец, $d_r^{p,q}:\ E_r^{p,q}\to E_r^{p+r,q-r+1}$ совпадает с $d_p:\ K^p\to K^{p+1}$ при $q=0,r=1$ и тривиален в остальных случаях.

7. Пусть $K^\bullet$ является тотальным комплексом бикомплекса $(L^{\bullet\bullet},d',d'')$ (см. задачу 4 предыдущего листка). Рассмотрим на $K^\bullet$ убывающую фильтрацию $F'_p(K^n):=\bigoplus_{i+j=n}^{i\geq p}L^{ij}$ (ср. задачу 6 предыдущего листка). Соответствующая спектральная последовательность обозначается $'E_r^{pq}$. Докажите, что $'E_2^{pq}=H^p_{d'}(H^{\bullet,q}_{d''}(L^{\bullet\bullet}))$.