Упражнения по гомологической алгебре к 22 ноября

Цель этого листка — доказать следующую теорему А.Бореля. Пусть $E_2^{\bullet\bullet} = B^\bullet \otimes \Lambda(V^\bullet)$ — второй член спектральной последовательности с умножением, и предельный член $E_\infty^{\bullet\bullet}$ тривиален, т.е. $E_\infty^{0,0} = \mathbf{C}$, $E_\infty^{p,q} = 0$ иначе. Тогда $B = S(V^\bullet\langle -1\rangle)$ (т.е. градуировка образующих симметрической алгебры на единицу выше градуировки образующих внешней алгебры).

1. Пусть $b_1, \ldots, b_n$ — однородные элементы косокоммутативной градуированной алгебры B. *Соотношением степени* k называется равенство $a_1 b_{i_1} + \ldots + a_m b_{i_m} = 0$, где $1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n$, $\deg a_j + \deg b_{i_j} = k$ и $\exists j$ т.ч. $a_j \notin (b_{i_1}, \ldots, b_{i_j - 1}, b_{i_j + 1}, \ldots, b_{i_m})$ (идеал, порожденный этими элементами). Пусть все b_i имеют одну и ту же степень $s \le k$. Докажите, что между $b_1, \ldots, b_n$ нет никаких соотношений степени k и ниже тогда и только тогда, когда

а) Для всякой перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ аннулятор $Ann(b_{\sigma_i})$ в факторкольце $B/(b_{\sigma_1}, \ldots, b_{\sigma_{i-1}})$ не содержит нетривиальных элементов степени $\le k - s$;

Эквивалентно, б) $\forall\, i \le n$ аннулятор $Ann(b_i)$ в факторкольце $B/(b_1, \ldots, b_{i-1})$ не содержит нетривиальных элементов степени $\le k - s$;

2. Пусть V однородно нечетной степени $s - 1$ с базисом $v_1, \ldots, v_n$. Рассмотрим биградуированную алгебру $A = B \otimes \Lambda(V)$; градуировка по B обозначается $\deg'$; градуировка по $\Lambda(V)$ обозначается $\deg''$; тотальная градуировка обозначается $\deg = \deg' + \deg''$; градуировка $\Lambda(V) = \bigoplus_0^n \Lambda^i(V)$ обозначается $\deg_\Lambda$. Предположим, в A действует дифференциал d бистепени $(s, 1 - s)$, удовлетворяющий правилу Лейбница; пусть $d(1 \otimes v_i) = b_i \otimes 1$. На когомологиях $H = H_d(A)$ индуцируются все вышеопределенные градуировки. Докажите, что

а) Подалгебра H элементов степени $\deg'' = 0$ изоморфна $B/(b_1, \ldots, b_n)$;

б) Если все коциклы d, у которых $\deg' \le k - s$ и $\deg_\Lambda = 1$, являются кограницами, то это же верно и для коциклов степени $\deg' \le k - s$ и произвольной степени $\deg_\Lambda \ge 1$;

в) Предыдущее условие эквивалентно условию б) предыдущей задачи (т.е. между элементами $b_1, \ldots, b_n$ нет соотношений степени k и ниже).

3. Пусть теперь $V = V^1 \oplus \ldots \oplus V^m$ градуировано нечетными степенями и $F^i V := \bigoplus_{j \ge i} V^j$. Пусть $A = B \otimes \Lambda(V)$ является членом E_2 спектральной последовательности с умножением; $E_2^{p,q} = B^p \otimes (\Lambda(V))^q$. Тогда $B \otimes 1$ проецируется в член E_r (факторизуясь по образу предыдущих дифференциалов); образ будет обозначаться B_r. Если подпространство $1 \otimes S \subset 1 \otimes \Lambda(V)$ обнуляется дифференциалом d_2, оно вкладывается в E_3, и его образ будет обозначаться по-прежнему $1 \otimes S$. Если оно обнуляется и последующими дифференциалами вплоть до d_{r-1}, оно вкладывается и в E_r, и образ по-прежнему обозначается $1 \otimes S$.

Будем обозначать Th_t^k совокупность следующих двух утверждений (второе имеет смысл только в предположении первого):

а) $d_r(1 \otimes F^r V) = 0$ для $2 \le r \le t$;

б) если $i \le \min(t,k)$, то d_i вкладывает $1 \otimes V^{i-1}$ в B_i^i (образ обозначается W^i), и между элементами образа нет никаких соотношений степени k и ниже.

Докажите, что Th_t^k влечет для любого $2 \le r \le \min(t,k)$

а) Естественная проекция из $H_{d_r}(B_r \otimes \Lambda(V^{r-1})) \otimes \Lambda(F^r V)$ в E_{r+1} является вложением в степенях $\deg' \le k+1$;

б) В степенях $\deg' \le k-r$ эта проекция является изоморфизмом, и образ ее изоморфен $B_r/(W^r) \otimes \Lambda(F^r V) \simeq B_{r+1} \otimes \Lambda(F^r V)$ (в этих степенях);

в) Образ $B \otimes \Lambda(F^r V)$ в E_{r+1} является фактором алгебры $B_{r+1} \otimes \Lambda(F^r V)$ и совпадает с ней в степенях $\deg' \le k+1$.

4. Предположим, что E_∞ тривиально в степенях $\deg \le k$ и Th_t^k верно. Пусть $0 \ne e \in E_p$, $0 < \deg e \le k$, $\deg'' e < p-1$. Докажите, что тогда найдется $x \in E_2$ и целое число $s \ge p$ такие, что $d_r x = 0$ при $r < s$; $d_r e = 0$ при $p \le r \le s$; образ e в E_s равен $d_s x \ne 0$. Более того, если $t \ge k$ или $s \le \min(t,k)$, то $\deg'' e = 0$.

5. Если $1 \otimes v \in 1 \otimes \Lambda(V)$, $\deg(v) = i-1$ и $d_r v = 0$ при $r < i$, то говорят, что v *трансгрессивен*, а его образ $d_i(1 \otimes v) \in B_i$ или, точнее, любой элемент $w \in B$, $\deg(w) = i$, такой что образ $w \otimes 1$ в B_i совпадает с $d_i(1 \otimes v)$, называется *трансгрессией* v.

Предположим, что E_∞ тривиально в степенях $\deg \le t$ и Th_t^0 верно. Докажите, что

а) Th_t^{t+1} верно и все трансгрессивные элементы $\Lambda(V)$ степени $\le t$ содержатся в V;

б) Пусть $v_1, \ldots, v_l$ — однородный базис $V^1 \oplus \ldots \oplus V^{t-1}$ и w_i является трансгрессией v_i. Тогда $w_1, \ldots, w_l$ порождают B в степенях $\le t$, и $B = \mathbf{C}[w_1, \ldots, w_l]$ в степенях $\le t$.

6. Докажите, что

а) Если t четно, то Th_t^{2t+1} влечет Th_{t+1}^{2t+1};

б) Если t нечетно и Th_t^{2t+1} верно, то между элементами W^{t+1} (трансгрессия V^t) нет никаких соотношений в B степени $2t+2$ и ниже;

в) Th_t^{2t+1} влечет Th_{t+1}^{2t+1};

г) Th_2^3 верно;

д) Если Th_t^{2t-1} верно и существует $0 \ne e \in E_p$, $0 < \deg e \le 2t$, $\deg'' e < p-1$, то либо найдется целое s, $p \le s \le t$, такое что $\deg'' e = 0$ и образ e лежит в идеале $(W^s) \subset B_s$ и не равен нулю; либо найдется целое $s > t$ такое, что $\deg e$ четно и образ e в E_s равен $d_s(1 \otimes v)$ для некоторого $v \in 1 \otimes F^t V$;

е) Если Th_t^{2t-1} верно, то $B^i = 0$ для нечетных $i \le 2t-1$;

ж) Th_t^{2t-1} влечет Th_t^{2t+1}.

7. Докажите теорему А.Бореля: пусть E_∞ тривиальна в степенях $\deg \leq n \geq 2m+1$ (напомним, что m — максимальная степень в V). Тогда V имеет базис $v_1, \ldots, v_l$, состоящий из однородных трансгрессивных элементов. Все трансгрессивные элементы $\Lambda(V)$ лежат в V. Пусть $w_i \in B$ является трансгрессией v_i. Тогда $B = \mathbf{C}[w_1, \ldots, w_l]$ в степенях $\leq n$.