Упражнения по гомологической алгебре к 29 ноября

1. Пусть L, M — линейные (комплексные) расслоения над X. Докажите, что $c_1(L\otimes M)=c_1(L)+c_1(M)$.

2. Пусть $\lambda=(\lambda_1\ge\lambda_2\ge\ldots\ge\lambda_m\ge 0)$ — разбиение длины m, а $\delta=(m-1,m-2,\ldots,1,0)$. Пусть $x_1,\ldots,x_m$ — независимые переменные, $a_\delta=\det(x_i^{m-j})$ — многочлен Вандермонда, $a_{\lambda+\delta}=\det(x_i^{\lambda_j+m-j})$. Многочлен $s_\lambda(x_1,\ldots,x_m):=a_{\lambda+\delta}a_\delta^{-1}$ называется *многочленом Шура.*

а) Проверьте, что это симметрический многочлен, однородный степени $|\lambda|=\lambda_1+\ldots+\lambda_m$;

б) Докажите, что $\prod_{i=1}^m\prod_{j=1}^n(x_i+y_j)=\sum_\lambda s_\lambda(x)s_{'\lambda}(y)$, где суммирование производится по всем разбиениям $\lambda=(n\ge\lambda_1\ge\lambda_2\ge\ldots\ge\lambda_m\ge 0)$; двойственное разбиение имеет вид $\lambda'=(\lambda'_1,\ldots,\lambda'_n)$, а $'\lambda=(m-\lambda'_n,\ldots,m-\lambda'_1)$;

в) Докажите, что $\prod_{i=1}^m\prod_{j=1}^n(1+x_i+y_j)=\sum_{\lambda,\mu}d_{\lambda\mu}s_\mu(x)s_{'\lambda}(y)$, где суммирование производится по всем разбиениям $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$, $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_m)$ т.ч. $\mu_i\le\lambda_i\le n$; наконец, $d_{\lambda\mu}=\det\left(\binom{\lambda_i+m-i}{\mu_j+m-j}\right)_{1\le i,j\le m}$.

3. Пусть E — m-мерное векторное расслоение над X, и $c(E)=1+c_1(E)+\ldots+c_m(E)=\prod_{i=1}^m(1+x_i)$ — его полный класс Чженя. Докажите, что

а) $c(\Lambda^2E)=\prod_{i<j}(1+x_i+x_j)=2^{-m(m-1)/2}\sum_{\mu\le\delta}d_{\delta\mu}2^{|\mu|}s_\mu(x_1,\ldots,x_m)$ (суммирование ведется по разбиениям $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_m)$ т.ч. $\mu_i\le m-i$);

б) $c(S^2E)=\prod_{i\le j}(1+x_i+x_j)=2^{-m(m-1)/2}\sum_{\mu\le\varepsilon}d_{\varepsilon\mu}2^{|\mu|}s_\mu(x_1,\ldots,x_m)$, где $\varepsilon=(m,m-1,\ldots,1)$;

в) Если F — n-мерное расслоение над X с полным классом Чженя $c(F)=\prod_{j=1}^n(1+y_j)$, то $c(E\otimes F)=\prod_{i=1}^m\prod_{j=1}^n(1+x_i+y_j)=\sum_{\lambda,\mu}d_{\lambda\mu}s_\mu(x)s_{'\lambda}(y)$.

4. Пусть E — m-мерное векторное расслоение над X, и $c(E)=1+c_1(E)+\ldots+c_m(E)=\prod_{i=1}^m(1+x_i)$ — его полный класс Чженя. *Характер Черна* $ch(E):=\sum_{i=1}^m\exp(x_i)$. Докажите, что $ch(E\oplus F)=ch(E)+ch(F)$; $ch(E\otimes F)=ch(E)ch(F)$.

5. Пусть $\mathcal{T}\to Gr(n,N)$ — тавтологическое расслоение, и $c_i=c_i(\mathcal{T})$ — его классы Чженя. Докажите, что класс когомологий c_i принимает значение 0 на всех клетках (циклах) Шуберта, кроме одного, а $c_i(Sch(N-n,\ldots,N-n,N-n-1,\ldots,N-n-1))=1$ (i раз повторяется $N-n-1$).

6. Пусть $n=2, N=4$. Найдите все соотношения между c_1,c_2 в $H^\bullet(Gr(2,4))$. Указание: пусть $\mathcal{Q}=\mathbf{C}^4/\mathcal{T}$ — тавтологическое факторрасслоение. Тогда $c(\mathcal{T})c(\mathcal{Q})=c(\mathbf{C}^4)=1$, т.е. $1+c_1(\mathcal{Q})+c_2(\mathcal{Q})+c_3(\mathcal{Q})+\ldots=c^{-1}(\mathcal{T})$. Однако $c_i(\mathcal{Q})=0$ при $i>2$ — это все соотношения.

7*. Пусть $\mathcal{T}\to Gr(n,N)$ — тавтологическое расслоение, и $c(\mathcal{T})=\prod_{i=1}^n(1+x_i)$ — его полный класс Чженя. Докажите, что многочлен Шура $s_\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ (где $N-n\ge\lambda_1\ge\ldots\ge\lambda_n\ge 0$) принимает значение 0 на всех клетках (циклах) Шуберта, кроме одного, а $s_\lambda(Sch(N-n-\lambda_n,\ldots,N-n-\lambda_1))=1$.

8. Докажите, что для классических простых алгебр Ли образующими кольца инвариантов $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ служат

а) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n : \ Tr(A^i), \ 2 \leq i \leq n;$

б) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n} : \ Tr(A^{2i}), \ 1 \leq i \leq n;$

в) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1} : \ Tr(A^{2i}), \ 1 \leq i \leq n;$

г) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n} : \ Tr(A^{2i}), \ 1 \leq i \leq n-1$, и Пфаффиан $Pf(A)$ (напомним, что $Pf^2(A) = \det(A)$).