А. М. Вербовецкий

Геометрия конечных джетов и дифференциальных уравнений: дополнительные главы

(задачи)

Задача 1. Пусть $\mathscr{E} \subset J^k(E,n)$ — уравнение, первое продолжение которого над некоторой точкой $a_k \in \mathscr{E}$ не пусто. Докажите, что множество характеристических ковекторов уравнения $\mathscr{E}^{(1)}$ в произвольной точке $a_{k+1} \in \mathscr{E}^{(1)}$, $\pi_{k+1,k}(a_{k+1}) = a_k$, совпадает с множество характеристических ковекторов уравнения $\mathscr{E}$ в точке a_k.

Задача 2. Пусть E — контактное (или симплектическое) многообразие, а $I^k(E)$ — многообразие k-джетов лежандровых (соотв., лагранжевых) подмногообразий в E. Докажите, что при $k \geqslant 2$ естественные проекции $\pi_{k,k-1}\colon I^k(E) \to I^{k-1}(E)$ являются аффинными расслоениями, опишите их и докажите, что поднятия контактных (соотв., симплектических) диффеоморфизмов суть аффинные автоморфизмы.

Задача 3. Пусть $\mathscr{E} = \{F(x_i, u, u_j, u_{jk}) = 0\}$ — скалярное уравнение второго порядка с одной зависимой переменной u и n независимыми переменными $x_1, \dots, x_n$. Выпишите для него в явном виде уравнение особенностей $\mathscr{E}_{[1]}$. Рассмотрите несколько примеров.

Задача 4. Рассмотрим регулярное скалярное уравнение $\mathscr{E}$ с двумя независимыми переменными x_1 и x_2 и одной зависимой переменной u. Пусть ω_0, ω_1 и ω_2 — стандартные формы Картана, $\omega_0 = du - u_1\,dx_1 - u_2\,dx_2$, $\omega_i = du_i - u_{1i}\,dx_1 - u_{2i}\,dx_2$, $i = 1, 2$, ограниченные на уравнение $\mathscr{E}$. Зафиксируем некоторую форму объема $V \in \Lambda^7(\mathscr{E})$ и определим на аннуляторе картановского распределения $\operatorname{Ann}(\mathscr{C}(\mathscr{E})) \subset \Lambda^1(\mathscr{E})$ линейную над $C^\infty(\mathscr{E})$ симметрическую форму $\langle\cdot\,,\cdot\rangle\colon \operatorname{Ann}(\mathscr{C}(\mathscr{E})) \times \operatorname{Ann}(\mathscr{C}(\mathscr{E})) \to C^\infty(\mathscr{E})$ с помощью равенства

$$\langle\eta, \xi\rangle V = d\eta \wedge d\xi \wedge \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Докажите, что ранг этой формы равен 1 или 2, причем три возможные ситуации:

1) ранг = 1,
2) ранг = 2 и индекс = 0,
3) ранг = 2 и индекс = 1,

соответствуют трем возможным типам уравнения (в рассматриваемой точке):

1) параболическое,
2) эллиптическое,
3) гиперболическое.

В гиперболическом случае рассматриваемая форма имеет два двумерных изотропных подпространства, которые определяют два 5-мерных распределения на $\mathscr{E}$. Убедитесь, что размерности их характеристических подраспределений $\leqslant 1$. Докажите, что оба характеристических подраспределения имеет размерность 1 в том, и только в том случае, когда рассматриваемое уравнение является уравнением Монжа–Ампера.

Задача 5. Пусть $a \in J^k(\mathbb{R}^3, 2)$ — точка в пространстве k-джетов двумерных подмногообразий в трехмерном пространстве. Рассмотрим многообразие Грассмана $Gr_k(a)$ всех двумерных подпространств в картановской плоскости $\mathscr{C}(a) \subset T_a(J^k(\mathbb{R}^3, 2))$. Пусть $G_k \subset Gr_k(a)$ — замыкание множества R-плоскостей в точке a (R-грассманиан). Опишите

Экзамен: 5 задач

Математический колледж Независимого московского университета

1999/2000 учебный год

явным образом пространства G_k для $k = 1$, 2 и 3. Какие плоскости отвечают особым точкам пространства G_3?

Задача 6. Пусть f, $g \in C^\infty(M)$ — такие функции на многообразии M, что $f(x) = g(x) = 0$ и $df|_x = dg|_x = 0$ в некоторой точке $x \in M$. Докажите, что если гессианы функций f и g невырождены и совпадают в точке x, $d^2 f|_x = d^2 g|_x$, то существует такой локальный диффеоморфизм φ, что $\varphi^*(f) = g$ в окрестности x.

Задача 7. Пусть на многообразии M имеются две контактные структуры, совпадающие на касательном пространстве $T(N)$ к некоторому подмногообразию $N \subset M$. Докажите, что для каждой точки $x \in N$ существуют окрестности $\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2 \ni x$ и диффеоморфизм $\mathscr{U}_1 \to \mathscr{U}_2$, который тождествен на $\mathscr{U}_1 \cap N$ и переводит контактные структуры друг в друга.

Задача 8. а) Пусть $L \subset J^1(M)$ — лежандрово подмногообразие. Докажите, что для любой точки $x \in L$ существует окрестность $\mathscr{U} \subset L$, $\mathscr{U} \ni x$, проекция которой в $T^*(M)$ является лагранжевым подмногообразием, причем каноническая форма $\rho = p\,dq$ на нем точна. Постройте пример, показывающий, что это утверждение неверно глобально.

б) Докажите, что для каждого связного лагранжева многообразия $N \subset T^*(M)$ найдется такое лежандрово многообразие $\tilde{N} \subset J^1(M)$, что проекция $\tilde{N} \to N$ является накрытием.

Задача 9. Пусть $\mathscr{E} \subset J^1(M)$ — инволютивное уравнение первого порядка с одной неизвестной, $\operatorname{codim} \mathscr{E} = r$, и $\omega \in \Lambda^1(\mathscr{E})$ — ограничение контактной формы на $\mathscr{E}$. Докажите, что

$$\omega \wedge \underbrace{d\omega \wedge \ldots \wedge d\omega}_{n-r+1 \text{ раз}} = 0$$

Пусть $x \in \mathscr{E}$ — такая точка на уравнении, что отображение

$$\pi_{*,x}|_{T_x(\mathscr{E})} : T_x(\mathscr{E}) \to T_x(T^*(M)),$$

где $\pi\colon J^1(M) \to T^*(M)$ — естественная проекция, является мономорфизмом. Вычислите ранг формы $d\omega_x$.

Задача 10. Пусть $\mathscr{E} \subset J^1(M)$ — инволютивное регулярное уравнение первого порядка с одной неизвестной, $\operatorname{codim} \mathscr{E} = r$. Докажите, что однозначное решение этого уравнения, проходящее через некоторую точку $x \in \mathscr{E}$, существует тогда и только тогда, когда отображение

$$\pi_{*,x}|_{\mathscr{C}_x^\perp(\mathscr{E})}\, \mathscr{C}_x^\perp(\mathscr{E}) \to T_{\pi(x)}(M),$$

где $\pi\colon J^1(M) \to M$ — естественная проекция и $\mathscr{C}_x^\perp(\mathscr{E})$ — косоортогональное дополнение к картановской плоскости $\mathscr{C}_x(\mathscr{E}) \subset \mathscr{C}(x)$, является мономорфизмом.

Задача 11. Рассмотрим уравнение световых лучей $(\operatorname{grad} u)^2 = \sum_{i=1}^n (\partial u/\partial x_i)^2 = 1$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Опишите конусы Монжа этого уравнения. Докажите, что значение функции $u(x)$, удовлетворяющей данному уравнению, в любой точке $\mathbb{R}^n$ равно расстоянию от этой точки до поверхности $u(x) = 0$.

Задача 12. Покажите, что задача о движении на прямой трех точек, взаимодействующих между собой с силой, обратно пропорциональной кубу расстояния между ними, разрешима в квадратурах.

З а д а ч а 13. Докажите, что система из двух уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными и одной зависимой инволютивна (по Картану) тогда и только тогда, когда характеристики распределения Картана на уравнении образуют одномерное распределение.

З а д а ч а 14. Пусть $\mathscr{F}$ — распределение коразмерности r на некотором многообразии и $\omega_1, \ldots, \omega_r$ — базис в $\operatorname{Ann}\mathscr{F}$. Рассмотрим наибольшее число l такое, что форма $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_r \wedge (\lambda_1\, d\omega_1 + \lambda_2\, d\omega_2 + \ldots + \lambda_r\, d\omega_r)^l$ не обращается тождественно в нуль для каких-то значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. (Число l называется *инвариантом Энгеля* распределения $\mathscr{F}$.) Докажите, что существует такой базис $\omega'_1, \ldots, \omega'_r$ в $\operatorname{Ann}\mathscr{F}$, что для каждой формы ω'_i характеристическое распределение $(\ker \omega'_i)_0$ распределения гиперплоскостей $\ker \omega'_i$ имеет коразмерность $2l + 1$.

З а д а ч а 15. Опишите алгебру внутренних симметрий уравнения Гильберта–Картана $v' = (u'')^2$. (Это недоопределенное обыкновенное уравнение.)

З а д а ч а 16. Пусть $a_k \in \mathscr{E}$, $a_k = [L]^k_a$. Множество характеристических ковекторов в этой точке является алгебраическим подмногообразием в $T^*_a(L)$. Идеал этого многообразия $\mathscr{I}$ называется *характеристическим идеалом*. Рассмотрим комплексные характеристические ковекторы, т. е. ненулевые элементы комплексифицированного пространства $\mathbb{C} \otimes T^*_a(L)$, являющееся нулями характеристического идеала. Докажите, что следующие два условия эквивалентны:

1) уравнение не имеет комплексных характеристических ковекторов;
2) $g^{(l)} = 0$ для достаточно большого l (в этом случае говорят, что уравнение имеет *конечный тип*).

З а д а ч а 17. В каждой точке уравнения $\mathscr{E}$ рассмотрим *характеристическое многообразие* $\mathscr{V} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C} \otimes T^*_a(L))$, т. е. подмногообразие проективного комплексного кокасательного пространства, определяемое характеристическим идеалом. Докажите, что если система уравнений с одной зависимой переменной не является ординарной, то в каждой точке уравнения (1) характеристическое многообразие содержится в некоторой гиперплоскости $\mathscr{H} \supset \mathscr{V}$ и (2) существует хотя бы один элемент характеристического идеала, нормальная производная (соответствующая $\mathscr{H}$) которого не принадлежит характеристическому идеалу.

З а д а ч а 18. Пусть $L \subset E$, $\mathscr{E} \subset J^k(E, n)$. Рассмотрим в кольце $C^\infty(T^*(L))$ идеал состоящий из функций, принадлежащих в каждой точке $a \in L$ характеристическому идеалу уравнения $\mathscr{E}$. При каком условии этот идеал замкнут относительно скобки Пуассона?

З а д а ч а 19. Пусть g — псевдориманова метрика на многообразии M. Рассмотрим уравнение $\mathscr{E} \subset J^1(M, M)$, $\mathscr{E} = \{\, [f]^1_a \mid f^*(g) = \lambda g$ для некоторой функции $\lambda \,\}$. Найдите необходимое и достаточное условие формальной интегрируемости уравнения $\mathscr{E}^{(1)}$.