А. М. Вербовецкий

Геометрия конечных джетов и дифференциальных уравнений: дополнительные главы

(краткие записки)

Содержание курса

Математический колледж Независимого московского университета
1999/2000 учебный год

1. Джеты (струи) подмногообразий

Зафиксируем гладкое многообразие E, $\dim E = n + m$, и целое число n, $0 \leqslant n < \dim E$. Рассмотрим два n-мерных подмногообразия L_1 и L_2 в E, которые пересекаются в некоторой точке a. Пусть вблизи этой точки они описываются уравнениями

$$x_{n+j} = f_j(x_1, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad x_{n+j} = g_j(x_1, \dots, x_n), \qquad j = 1, \dots, m.$$

Если функций f_j и g_j имеют в точке пересечения одинаковые частные производные до порядка k включительно, то говорят, что подмногообразия L_1 и L_2 *касаются друг друга в точке* $a \in E$ *с порядком* $\geqslant k$, $0 \leqslant k \leqslant \infty$.

Упражнение 1.1. Пусть L — n-мерное подмногообразие в E, $\mu_a(L)$ — идеал в кольце $C^\infty(L)$, состоящий из функций, обращающихся в нуль в точке $a \in L$, а $\mu_a^k(L)$ — его k-я степень. Докажите, что L_1 и L_2 имеют в точке a касание порядка $\geqslant k$ тогда и только тогда, когда для любой такой функции $h \in C^\infty(E)$, что $h|_{L_1} = 0$, выполняется условие $h|_{L_2} \in \mu_a^{k+1}(L_2)$.

Касание порядка $\geqslant k$ в точке $a \in E$ является отношением эквивалентности на множестве всех n-мерных подмногообразий в E, содержащих a.

Определение 1.1. Класс эквивалентности некоторого подмногообразия L относительно этого отношения эквивалентности обозначается через $[L]_a^k$ и называется *джетом порядка* k *подмногообразия* L *в точке* a.

Множество джетов порядка k всех n-мерных подмногообразий многообразия E в точке a обозначим через $J_a^k(E, n)$, а множество таких джетов во всевозможных точках $a \in E$ — через $J^k(E, n)$.

Рассмотрим вблизи некоторой точки $a \in E$ локальные координаты $(x_1, \dots, x_{n+m})$. Пусть подмногообразие L, проходящее через точку a, локально можно описать уравнениями

$$x_{n+j} = f^j(x_1, \dots, x_n), \qquad j = 1, \dots, m.$$

Тогда джет $[L]_a^k$ однозначно определяется заданием в точке a производных

$$\frac{\partial^{|\sigma|} f^j}{\partial x_\sigma}, \qquad j = 1, \dots, m, \quad |\sigma| \leqslant k,$$

где σ обозначает неупорядоченный набор целых чисел $i_1 i_2 \dots i_r$, $1 \leqslant i_s \leqslant n$, $|\sigma| = r$ и $\partial^{|\sigma|}/\partial x_\sigma = \partial^r/\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}$. Таким образом, в множестве джетов порядка k подмногообразий, представимых в виде $x_{n+j} = f^j(x_1, \dots, x_n)$, можно ввести координаты (x_i, u_σ^j), $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $|\sigma| \leqslant k$, считая, что координаты точки $[L]_a^k$ суть $\bigl(x_i = x_i(a), u_\sigma^j = \partial^{|\sigma|} f^j / \partial x_\sigma\big|_a\bigr)$.

Упражнение 1.2. Проверьте, что

1) описанные системы координат задают на $J^k(E, n)$ структуру гладкого многообразия;
2) $\dim J^k(E, n) = n + m\binom{k+n}{n}$;
3) отображения $\pi_{k,l} \colon J^k(E, n) \to J^l(E, n)$, $[L]_a^k \mapsto [L]_a^l$, $k \geqslant l$, являются гладкими расслоениями;
4) отображения $j_k(L) \colon L \to J^k(E, n)$, $L \ni a \mapsto [L]_a^k$, $L \subset E$ суть гладкие вложения;
5) $\pi_{l,s} \circ \pi_{k,l} = \pi_{k,s}$ при $k \geqslant l \geqslant s$;
6) $\pi_{k,l} \circ j_k(L) = j_l(L)$ при $k \geqslant l$.

Пример 1.1. Джет нулевого порядка $[L]_a^0$ можно отождествить с точкой a, следовательно $J^0(E, n) = E$.

Пример 1.2. Джет $[L]_a^1$ порядка 1 можно отождествить с касательной плоскостью $T_a(L) \subset T_a(E)$, поэтому $J_a^1(E, n)$ — грассманиан n-мерных подпространств в $T_a(E)$.

Упражнение 1.3. Докажите, что $\pi_{1,0} \colon J^1(E, n) \to E$ — грассманово расслоение.

Каждое гладкое отображение $F \colon E_1 \to E_2$ порождает гладкие отображения $F^{(k)} \colon J^k(E_1, n) \to J^k(E_2, n)$, $[L]_a^k \mapsto [F(L)]_{F(a)}^k$, называемые *поднятиями* F и являющиеся морфизмами расслоений $\pi_{k,l}$:

$$\pi_{k,l} \circ F^{(k)} = F^{(l)} \circ \pi_{k,l}, \qquad k \geqslant l.$$

Упражнение 1.4. Проверьте, что $\mathrm{id}^{(k)} = \mathrm{id}$ и $(F \circ G)^{(k)} = F^{(k)} \circ G^{(k)}$.

Если многообразие E является тотальным пространством гладкого расслоения $\pi\colon E \to M$, $\dim M = n$, то через $J^k(\pi)$ обозначим многообразие всех джетов порядка k графиков локальных сечений этого расслоения, т. е. подмногообразий, трансверсальных слоям расслоения π. Ясно, что $J^k(\pi)$ является открытым всюду плотным подмножеством в $J^k(E, n)$. Если s — сечение расслоения π, то через $[s]^k_x$, $x \in M$, мы обозначим джет графика этого сечения в точке $s(x)$, а через $j_k(s)$ — отображение $j_k(s(M)) \circ s\colon M \to J^k(\pi)$. Композиция $\pi_k = \pi \circ \pi_{k,0}$ превращает $J^k(\pi)$ в расслоенное пространство над M.

Упражнение 1.5. Пусть $F\colon E \to E'$ — морфизм расслоения $\pi\colon E \to M$ в расслоение $\pi'\colon E' \to M$ над диффеоморфизмом $\bar{F}\colon M \to M$, т. е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ {\scriptstyle \pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ M & \xrightarrow{\bar{F}} & M \end{array}$$

Проверьте, что k-е продолжение $F^{(k)}\colon J^k(\pi) \to J^k(\pi')$ корректно определено, задается формулой $F^{(k)}([s]^k_x) = [F \circ s \circ \bar{F}^{-1}]^k_{\bar{F}(x)}$, является морфизмом расслоения π_k в π'_k над $\bar{F}$, а также, что $F^{(k)}$ есть морфизм над $F^{(l)}$ при $k \geqslant l$.

Если π — векторное расслоение, то таковыми являются и все расслоения π_k.

Упражнение 1.6. Пусть $\Gamma(\pi)$ — $C^\infty(M)$-модуль сечений векторного расслоения π. Докажите, что

$$J^k_x(\pi) = \Gamma(\pi)/\mu^{k+1}_x(M)\Gamma(\pi),$$

где $J^k_x(\pi)$ — слой расслоения π_k над точкой $x \in M$.

Лемма 1.1. *Пусть π — векторное расслоение. Тогда имеет место следующая точная последовательность векторных пространств:*

$$0 \to S^k(T^*_x(M)) \otimes E_x \xrightarrow{\alpha_k} J^k_x(\pi) \xrightarrow{\pi_{k,k-1}} J^{k-1}_x(\pi) \to 0,$$

где S^k обозначает k-ю симметрическую степень и $E_x = \pi^{-1}(x)$ — слой расслоения π над точкой $x \in M$.

Если $F\colon E \to E'$ — морфизм векторных расслоений $\pi\colon E \to M$ и $\pi'\colon E' \to M$ над диффеоморфизмом $\bar{F}\colon M \to M$, то следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S^k(T^*_x(M)) \otimes E_x & \longrightarrow & J^k_x(\pi) & \xrightarrow{\pi_{k,k-1}} & J^{k-1}_x(\pi) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle S^k((\bar{F}^{-1})^*)\otimes F_x}\big\downarrow & & {\scriptstyle F^{(k)}_x}\big\downarrow & & {\scriptstyle F^{(k-1)}_x}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S^k(T^*_{\bar{F}(x)}(M)) \otimes E'_{\bar{F}(x)} & \longrightarrow & J^k_{\bar{F}(x)}(\pi') & \xrightarrow{\pi'_{k,k-1}} & J^{k-1}_{\bar{F}(x)}(\pi') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$\lhd$ Ядро проекции $\pi_{k,k-1}|_{J^k_x(\pi)}$ состоит из джетов сечений, принадлежащих $\mu^k_x(M)\Gamma(\pi)$. Отображение α_k, определенное формулой

$$\alpha_k(df_1|_x \cdot \ldots \cdot df_k|_x \otimes s(x)) = [f_1 \cdot \ldots \cdot f_k \cdot s]^k_x,$$

где $f_i \in \mu_x(M)$, $s \in \Gamma(\pi)$, является изоморфизмом. $\rhd$

Если π — тривиальное расслоение $\pi\colon E = M \times N \to M$, то его сечения суть гладкие отображения из M в N. Пространство $J^k(\pi)$ в этом случае обозначается через $J^k(M, N)$. Если $N = \mathbb{R}$, то $J^k(M, \mathbb{R})$ — многообразие джетов функций на M, обозначаемое через $J^k(M)$.

Упражнение 1.7. Докажите, что

1) $J^k(M) = T^*(M) \times \mathbb{R}$;
2) $J^k(\mathbb{R}, N) = \mathbb{R} \times T(M)$.

Автоморфизмы тривиального расслоения $\pi\colon E = M \times N \to M$, имеющие вид

$$(x, y) \mapsto (F(x), G(y)),$$

где $x \in M$, $y \in N$, а $F\colon M \to M$ и $G\colon N \to N$ — диффеоморфизмы, индуцируют лево-правое действие на отображениях $\varphi\colon M \to N$:

$$\varphi \mapsto G \circ \varphi \circ F^{-1}.$$

Таким образом, лево-правое действие на отображениях поднимается до действия на джеты отображений.

2. Аффинные структуры в расслоениях джетов

Из леммы 1.1 непосредственно следует

Предложение 2.1. *Пусть $\pi\colon E \to M$ — векторное расслоение. Тогда расслоения*

$$\pi_{k,k-1}\colon J^k(\pi) \to J^{k-1}(\pi)$$

имеют аффинную структуру, причем слой $F(a_{k-1})$ над точкой $a_{k-1} \in J^{k-1}_x(\pi)$, $x \in M$, ассоциирован с линейным пространством $S^k(T^*_x(M)) \otimes E_x$. Поднятия автоморфизмов расслоения π являются аффинными автоморфизмами расслоений $\pi_{k,k-1}$.

В случае джетов подмногообразий имеет место следующая

Теорема 2.2. *Расслоения $\pi_{k,k-1}\colon J^k(E,n) \to J^{k-1}(E,n)$ при $k \geqslant 2$ имеют аффинную структуру, причем слой $F(a_{k-1})$ над точкой $a_{k-1} = [L]^k_a$, $a \in E$, ассоциирован с линейным пространством $S^k(T^*_a(L)) \otimes V_a(L)$, где $V_a(L) = T_a(E)/T_a(L)$ — нормальное подпространство к L в точке a. Поднятия локальных диффеоморфизмов многообразия E являются аффинными автоморфизмами расслоений $\pi_{k,k-1}$, $k \geqslant 2$.*

$\lhd$ Рассмотрим трубчатую окрестность $\mathscr{O}$ подмногообразия L и отождествим ее с нормальным расслоением $\alpha\colon \mathscr{O} \to L$ подмногообразия L. Тогда образ естественного вложения $J^k(\alpha) \hookrightarrow J^k(E,n)$ покрывает некоторую окрестность точки $[L]^k_a$ и индуцирует в этой окрестности аффинную структуру на расслоении $\pi_{k,k-1}$. $\rhd$

Упражнение 2.1. Убедитесь, что координаты u^j_σ, $|\sigma| = k$, суть аффинные координаты в слое $F(a_{k-1})$, $k \geqslant 2$.

Замечание 2.1. Аффинная структура в слоях расслоений $\pi_{k,k-1}\colon J^k(M,N) \to J^{k-1}(M,N)$, $k \geqslant 2$, является инвариантной относительно лево-правого действия.

Замечание 2.2. Случай $k = 1$ рассмотрен в упр. 1.3. Добавим, что поднятия $F^{(1)}$ локальных диффеоморфизмов $F\colon E \to E$ суть в каждой точке $a \in E$ линейные коллинеации соответствующих грассманианов, порожденные дифференциалами $F_{*,a}$.

3. Дифференциальная группа

Пусть $G^k_a(M) \subset J^k(M,M)$ — подмножество джетов порядка k локальных диффеоморфизмов многообразия M, сохраняющих точку $a \in M$. Композиция диффеоморфизмов определяет в $G^k_a(M)$ структуру группы Ли, называемой *дифференциальной группой порядка k*.

Очевидно, что $G^1_a(M) = GL(T_a(M))$.

Из теоремы 2.2 вытекает, что ядро H^k_a естественной проекции $\pi_{k,k-1}\colon G^k_a(M) \to G^{k-1}_a(M)$ при $k \geqslant 2$ является абелевой группой, изоморфной $S^k(T^*_a(M)) \otimes T_a(M)$. Таким образом, группы $G^k_a(M)$ получаются последовательными расширениями полной линейной группы $GL(T_a(M))$ при помощи абелевых групп H^k_a, $k \geqslant 2$.

Дифференциальная группа $G^k_a(E)$ естественным образом действует на пространстве $J^k_a(E,n)$: $[\varphi]^k_a([L]^k_a) = [\varphi(L)]^k_a$. При этом группа H^k_a действует транзитивно на слое $F(a_{k-1})$ проекции $\pi_{k,k-1}$ над точкой $a_{k-1} = [L]^{k-1}_a \in J^{k-1}(E,n)$. Таким образом, слой $F(a_{k-1})$ несет аффинную структуру, ассоциированную с векторным пространством $H^k_a/H^k_a(a_k)$, где $H^k_a(a_k)$ — стабилизатор точки a_k.

Упражнение 3.1. Проверьте, что эта структура совпадает со структурой из теоремы 2.2.

4. Распределение Картана

Рассмотрим некоторое n-мерное подмногообразие $L \subset E$ и его k-*е продолжение*

$$L^{(k)} = \operatorname{im} j_k(L) = \{\, [L]^k_a,\ a \in L\,\}.$$

Каждая точка $a_k = [L]^k_a \in J^k(E,n)$ определяет подпространство $R(a_k) \subset T_{a_{k-1}}(J^{k-1}(E,n))$, касательное к подмногообразию $L^{(k-1)}$ в точке a_{k-1}, $R(a_k) = T_{a_{k-1}}(L^{(k-1)})$. Такие подпространства называются R-*плоскостями*.

Упражнение 4.1. Покажите, что если точка a_k имеет координаты $(\bar{x}_i, \bar{u}^j_\sigma)$, то векторы

$$\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ |\sigma|\leqslant k-1}} \bar{u}^j_{\sigma i}\frac{\partial}{\partial u^j_\sigma}$$

образуют базис в $R(a_k)$.

Упражнение 4.2. Докажите, что отображение $a_k \mapsto R(a_k)$ биективно, т. е. что многообразие $J^k(E,n)$ можно отождествить с многообразием R-плоскостей многообразия $J^{k-1}(E,n)$.

Упражнение 4.3. Докажите обобщение утверждения из предыдущего упражнения: многообразие $J^k(E,n)$ можно естественным образом отождествить с многообразием джетов порядка $k-s$ подмногообразий вида $L^{(s)}$ в $J^s(E,n)$ при $k \geqslant s$.

Точка $a_k \in J^k(E,n)$ и вектор $\xi \in T_a(L)$ однозначно определяют вектор $\xi(a_k) \in R(a_k)$, удовлетворяющий условию $(\pi_{k-1,0})_*(\xi(a_k)) = \xi$.

Пусть $a'_k,\ a''_k \in F(a_{k-1})$, $a_{k-1} = [L]^{k-1}_a$ и $\xi \in T_a(L)$. Разность $\xi(a'_k) - \xi(a''_k)$ принадлежит касательному пространству $T_{a_{k-1}}(F(a_{k-2}))$, которое можно отождествить с $S^{k-1}(T^*_a(L)) \otimes V_a(L)$. Используя координаты нетрудно проверить, что

$$\xi(a'_k) - \xi(a''_k) = i_\xi(a'_k - a''_k), \tag{4.1}$$

где разность $a'_k - a''_k$ понимается как элемент пространства $S^k(T^*_a(L)) \otimes V_a(L)$, а $i_\xi\colon S^k(T^*_a(L)) \otimes V_a(L) \to S^{k-1}(T^*_a(L)) \otimes V_a(L)$ — оператор подстановки вектора ξ в симметрическую форму.

Линейную оболочку всех R-плоскостей в точке a_k обозначим через $\mathscr{C}(a_k)$ и назовем *плоскостью Картана*.

Предложение 4.1. *Соответствие $a_k \mapsto \mathscr{C}(a_k)$ определяет гладкое распределение на пространстве $J^k(E,n)$* (распределение Картана). *Векторные поля $\partial/\partial u^j_\sigma$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $|\sigma| = k$, и*

$$D^{(k)}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ |\sigma|\leqslant k-1}} u^j_{\sigma i}\frac{\partial}{\partial u^j_\sigma}$$

образуют локальный базис этого распределения.

Следствие 4.2. 1) $\dim \mathscr{C}(a_k) = n + m\binom{k+n-1}{n-1}$.

2) *Картановскую плоскость $\mathscr{C}(a_k)$ можно представить в виде прямой суммы*

$$\mathscr{C}(a_k) = R(a_{k+1}) \oplus T_{a_k}(F(a_{k-1})), \qquad \forall a_{k+1} \in F(a_k).$$

3) $(\pi_{k,k-1})^{-1}_*(R(a_k)) = \mathscr{C}(a_k)$.

4) *Локально распределение Картана задается нулями 1-форм*

$$\omega^j_\sigma = du^j_\sigma - \sum_i u^j_{\sigma i}\, dx_i, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad |\sigma| < k.$$

Упражнение 4.4. Покажите, что если точка a_k имеет координаты $(\bar{x}_i, \bar{u}^j_\sigma)$, то формы

$$\omega^j_\sigma\big|_{a_k} = du^j_\sigma - \sum_i \bar{u}^j_{\sigma i}\, dx_i \in T^*_{a_{k-1}}(J^{k-1}(E,n)), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad |\sigma| < k,$$

задают плоскость $R(a_k)$.

5. Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением порядка $\leqslant k$ называется гладкое подмногообразие $\mathscr{E} \subset J^k(E,n)$. *Решением* уравнения $\mathscr{E}$ является такое n-мерное подмногообразие $L \subset E$, что $L^{(k)} \subset \mathscr{E}$.

Пусть $\mathscr{C}(\mathscr{E})$ — ограничение распределения Картана на уравнение $\mathscr{E}$. Точка $a_k \in \mathscr{E}$ называется *регулярной*, если в некоторой окрестности этой точки $\mathscr{C}(\mathscr{E})$ является распределением. Уравнение называется уравнением *главного типа*, если оно трансверсально слоям проекции $\pi_{k,k-1}\colon J^k(E,n) \to J^{k-1}(E,n)$. Все точки уравнений главного типа регулярны.

Мы будем рассматривать только уравнения главного типа.

Продолжением порядка l уравнения $\mathscr{E} \subset J^k(E,n)$ называется подмножество $\mathscr{E}^{(l)} \subset J^{k+l}(E,n)$, состоящее из таких точек $[L]_a^{k+l}$, что $L^{(k)}$ касается $\mathscr{E}$ в точке a с порядком $\geqslant l$.

Упражнение 5.1. Приведите примеры уравнений, продолжения которых не являются гладкими многообразиями.

Упражнение 5.2. Докажите, что если для некоторого l продолжение $\mathscr{E}^{(l)}$ — гладкое многообразие, то для всех r справедливо равенство $\mathscr{E}^{(l+r)} = (\mathscr{E}^{(l)})^{(r)}$.

Упражнение 5.3. Приведите примеры уравнений, для которых проекция $\pi_{k+l,k+l-1}\colon \mathscr{E}^{(l)} \to \mathscr{E}^{(l-1)}$ не сюрьективна.

Определение 5.1. Дифференциальное уравнение $\mathscr{E}$ называется *формально интегрируемым*, если для всех $l \geqslant 0$ продолжения $\mathscr{E}^{(l)}$ — гладкие подмногообразия, а проекции $\pi_{k+l,k+l-1}\colon \mathscr{E}^{(l)} \to \mathscr{E}^{(l-1)}$ — гладкие расслоения.

Формальная интегрируемость уравнения $\mathscr{E}$ означает, что для любой точки $a_{k+l} \in \mathscr{E}^{(l)}$ существует бесконечная последовательность точек $a_{k+r} \in \mathscr{E}^{(r)}$, $r = 0,1,2,\ldots$, проектирующихся друг в друга $\pi_{k+r,k+r-1}(a_{k+r}) = a_{k+r-1}$. Такую последовательность можно представлять себе как формальное решение уравнения.

Формальная интегрируемость связана с возможностью разрешить уравнение относительно того или иного набора производных старшего порядка. Поэтому условия формальной интегрируемости естественно формулируются в терминах символа (т. е. «старшей части») уравнения.

Определение 5.2. *Символом* уравнения $\mathscr{E}$ в точке $a_k = [L]_a^k \in \mathscr{E}$ называется пространство

$$g(a_k) = T_{a_k}(\mathscr{E}) \cap T_{a_k}(F(a_{k-1})) \subset S^k(T_a^*(L)) \otimes V_a(L).$$

Для уравнения главного типа семейство векторных пространств $a_k \mapsto g(a_k)$ является расслоением над $\mathscr{E}$.

Упражнение 5.4. Опишите символ уравнения в координатах.

Зафиксируем точку $a_k \in \mathscr{E}$ и введем следующие сокращения: $g = g(a_k)$, $\Lambda^r = \Lambda^r(T_a^*(L))$, $S^r = S^r(T_a^*(L))$, $V = V_a(L)$. Рассмотрим пространство $V_1 = (S^k \otimes V)/g$. Пусть $\sigma\colon S^k \otimes V \to V_1$ — естественная проекция. Определим ее продолжение $\sigma^{(l)}\colon S^{k+l} \otimes V \to S^l \otimes V_1$ как композицию стандартного вложения $S^{k+l} \otimes V \to S^l \otimes S^k \otimes V$ и отображения $S^l \otimes S^k \otimes V \to S^l \otimes V_1$, индуцированного σ. *Продолжением порядка* l символа $g(a_k)$ называется пространство $g^{(l)} = \ker \sigma^{(l)}$.

Упражнение 5.5. Докажите, что если продолжение $\mathscr{E}^{(l)}$ — гладкое многообразие в окрестности некоторой точки a_{k+l}, то символ уравнения $\mathscr{E}^{(l)}$ в этой точке является l-м продолжением символа $g(a_k)$ уравнения $\mathscr{E}$.

Продолжения символа могут не образовывать расслоения над $\mathscr{E}$.

Полиномиальный комплекс де Рама с коэффициентами в продолжениях символа $g(a_k)$:

$$0 \to g^{(l)} \xrightarrow{\delta} g^{(l-1)} \otimes \Lambda^1 \xrightarrow{\delta} g^{(l-2)} \otimes \Lambda^2 \xrightarrow{\delta} \ldots \xrightarrow{\delta} g \otimes \Lambda^l \xrightarrow{\delta} S^k \otimes \Lambda^l$$

называется *δ-комплексом Спенсера* в точке a_k, а его когомологии — δ-когомологиями Спенсера. Уравнение называется *инволютивным* (по Спенсеру), если δ-комплексы точны при всех l. Уравнение называется r-ацикличным, если δ-комплекс точен в членах $g^{(l-i)} \otimes \Lambda^i$ при $0 \leqslant i \leqslant r$ и всех l.

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Любое уравнение 1-ациклично.*

◁ Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & g^{(l)} & \xrightarrow{\delta} & g^{(l-1)}\otimes\Lambda^1 & \xrightarrow{\delta} & \dots & \xrightarrow{\delta} & g^{(1)}\otimes\Lambda^{l-1} & \xrightarrow{\delta} & g\otimes\Lambda^l & \xrightarrow{\delta} & S^{k-1}\otimes\Lambda^{l+1}\otimes V \xrightarrow{\delta} \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & S^{k+l}\otimes V & \xrightarrow{\delta} & S^{k+l-1}\otimes\Lambda^1\otimes V & \xrightarrow{\delta} & \dots & \xrightarrow{\delta} & S^{k+1}\otimes\Lambda^{l-1}\otimes V & \xrightarrow{\delta} & S^k\otimes\Lambda^l\otimes V & \to & S^{k-1}\otimes\Lambda^{l+1}\otimes V \xrightarrow{\delta} \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & S^l\otimes V_1 & \xrightarrow{\delta} & S^{l-1}\otimes\Lambda^1\otimes V_1 & \xrightarrow{\delta} & \dots & \xrightarrow{\delta} & S^1\otimes\Lambda^{l-1}\otimes V_1 & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^l\otimes V_1 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & c^{(l)} & \xrightarrow{\delta} & c^{(l-1)}\otimes\Lambda^1 & \xrightarrow{\delta} & \dots & \xrightarrow{\delta} & c^{(1)}\otimes\Lambda^{l-1} & \to & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

Здесь $c^{(l)} = \operatorname{coker}\sigma^{(l)}$. Все столбцы и две средние строки этой диаграммы точны, поэтому δ-когомологии в члене $g^{(i)}\otimes\Lambda^{l-i}$ равны когомологиям нижней строки в члене $c^{(i+2)}\otimes\Lambda^{l-i-2}$. ▷

Т е о р е м а 5.2 (δ-лемма Пуанкаре). *Для произвольного уравнения существует такое число l_0, что δ-комплекс Спенсера точен для всех $l \geqslant l_0$.*

◁ Рассмотрим комплекс, двойственный δ-комплексу Спенсера. Т. к. векторное пространство $\sum_{l\geqslant 0}(g^{(l)})^*$ естественным образом наделяется структурой модуля над кольцом многочленов $\sum_{k\geqslant 0} S^k(T_a(L))$, то и гомологии этого комплекса являются модулем над тем же кольцом. Этот модуль конечно порожден (т. к. кольцо многочленов — нётерово). С другой стороны, явная формула для дифференциала в рассматриваемом комплексе показывает, что элементы пространства $T_a(L)$ действуют на модуле гомологий тривиально. Следовательно, гомологии образуют конечномерное векторное пространство. ▷

З а м е ч а н и е 5.1. Можно показать, что число l_0 зависит лишь от n, m и k.

П р е д л о ж е н и е 5.3. *Если рассматриваемое уравнение 2-ациклично, а g и $g^{(1)}$ являются векторными расслоениями над $\mathscr{E}$, то и все продолжения $g^{(l)}$ являются векторными расслоениями.*

◁ Предложение доказывается с помощью очевидной индукции, на каждом шаге которой используется следующее утверждение: если задана точная последовательность векторных расслоений $E_1 \xrightarrow{f} E_2 \xrightarrow{g} E_3$ на некотором многообразии, то семейства $\ker f$ и $\operatorname{coker} g$ также являются векторными расслоениями (докажите!). ▷

П р е д л о ж е н и е 5.4. *Если $\mathscr{E}^{(l)}$ — гладкое многообразие, $g^{(l+1)}$ — векторное расслоение над $\mathscr{E}$ и отображение $\pi_{k+l+1,k+l}\colon \mathscr{E}^{(l+1)} \to \mathscr{E}^{(l)}$ сюрьективно, то $\mathscr{E}^{(l+1)}$ — также гладкое многообразие.*

Наша следующая цель — сформулировать условие сюрьективности отображений $\pi_{k+l+1,k+l}\colon \mathscr{E}^{(l+1)} \to \mathscr{E}^{(l)}$.

Определим по индукции последовательность пространств V_i, и сюрьективных отображений $\sigma_i\colon S^1\otimes V_i \to V_{i+1}$, $i \geqslant 1$. А именно, положим $\sigma_{i+1} = \operatorname{coker}\sigma_i^{(1)}$, где $\sigma_0 = \sigma$.

П р е д л о ж е н и е 5.5. $\sigma_{i+1}^{(j+1)} \circ \sigma_i^{(j)} = 0$. *Таким образом, для каждого $l \geqslant 0$ имеем комплекс*

$$0 \to g^{(l)} \to S^{k+l}\otimes V \xrightarrow{\sigma^{(l)}} S^l\otimes V_1 \xrightarrow{\sigma_1^{(l-1)}} S^{l-1}\otimes V_2 \xrightarrow{\sigma_2^{(l-2)}} \dots \xrightarrow{\sigma_l} V_{l+1} \to 0.$$

Этот комплекс точен тогда и только тогда, когда уравнение в рассматриваемой точке инволютивно. Точнее, ацикличность построенного комплекса в членах $g^{(l)}$, $S^{k+l}\otimes V$, $S^l\otimes V_1$, …, $S^{l-r+2}\otimes V_{r-1}$ равносильна r-ацикличности уравнения.

$\triangleleft$ Первое утверждение — несложное упражнение. Остальные доказываются с помощью следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & g^{(l)} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & g^{(l-1)}\otimes\Lambda^1 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \dots \arrow[r, "\delta"] & g^{(1)}\otimes\Lambda^{l-1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & g\otimes\Lambda^l \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & S^{k-1}\otimes\Lambda^{l+1}\otimes V \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & S^{k+l}\otimes V \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & S^{k+l-1}\otimes\Lambda^1\otimes V \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \dots \arrow[r, "\delta"] & S^{k+1}\otimes\Lambda^{l-1}\otimes V \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & S^k\otimes\Lambda^l\otimes V \arrow[r] \arrow[d] & S^{k-1}\otimes\Lambda^{l+1}\otimes V \arrow[r, "\delta"] & \dots \\
0 \arrow[r] & S^{l-1}\otimes V_2 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & S^{l-2}\otimes\Lambda^1\otimes V_2 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \dots \arrow[r, "\delta"] & \Lambda^{l-1}\otimes V_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & \\
 & \dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] & \dots & 0 & & & \\
0 \arrow[r] & S^1\otimes V_l \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda^1\otimes V_l \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & & & \\
 & 0 & 0 & & & & &
\end{tikzcd}$$

$\triangleright$

С л е д с т в и е 5.6. *Если рассматриваемое уравнение инволютивно, то все V_i суть векторные расслоения.*

Из последней коммутативной диаграммы вытекает также следующее важное

П р е д л о ж е н и е 5.7. *Если рассматриваемое уравнение инволютивно, то $V_i = 0$ при $i > n$.*

У п р а ж н е н и е 5.6. Докажите, что $V_i = (\Lambda^i\otimes V_1)\big/\delta(\Lambda^{i-1}\otimes\operatorname{im}\sigma^{(1)})$. Опишите в терминах этого изоморфизма дифференциалы $\sigma_i^{(j)}$.

Не уменьшая общности мы можем считать, что рассматриваемое уравнение лежит в джетах некоторого векторного расслоения π, $\mathcal{E}\subset J^k(\pi)$, и задается некоторым нелинейным дифференциальным оператором $\Delta\colon\Gamma(\pi)\to\Gamma(\pi_1)$.

З а м е ч а н и е 5.2. Отображение $\Delta\colon\Gamma(\pi)\to\Gamma(\pi_1)$ называется *дифференциальным оператором порядка* $\leqslant k$, если существует такое гладкое отображение $f_\Delta\colon J^k(\pi)\to J^0(\pi_1)$, что $\Delta(s) = f_\Delta\circ j_k(s)$. Говорят, что уравнение $\mathcal{E}$ задается оператором Δ, если $\mathcal{E} = f_\Delta^{-1}(0)$.

У п р а ж н е н и е 5.7. Докажите следующую формулу для оператора $\sigma^{(l)}$ в точке $a_{k+l} = [s]_a^{k+l}\in\mathcal{E}^{(l)}$ при $l\geqslant 1$:

$$\sigma^{(l)}([\varepsilon]_a^{k+l}) = [\Delta(s+\varepsilon)-\Delta(s)]_a^l.$$

Здесь $[\varepsilon]_a^{k+l-1} = 0$. В каком случае эта форму остается верной и при $l = 0$?

Рассмотрим некоторую точку $a_{k+l}\in J^{k+l}(\pi)$. Она принадлежит l-му продолжению $\mathcal{E}^{(l)}$ тогда и только тогда, когда $[\Delta(s)]_a^l = 0$. Значит, если $a_{k+l}\in\mathcal{E}^{(l)}$, то точка $[\Delta(s)]_a^{l+1}$ лежит в слое $S^{l+1}\otimes V_1$. Эта точка зависит от выбора сечения s, но ее образ при отображении $\sigma_1^{(l)}$ уже зависит только от a_{k+l} (Докажите!). Таким образом, мы построили некоторое сечение τ_l векторного расслоения $S^{(l+1)}\otimes V_2$ над $\mathcal{E}^{(l)}$, $\tau_l(a_{k+l}) = \sigma_1^{(l)}([\Delta(s)]_a^{l+1})$. Значение сечений τ_l объясняет следующее простое

П р е д л о ж е н и е 5.8. *Пусть* $a_{k+l} \in \mathscr{E}^{(l)}$ *и уравнение в этой точке инволютивно. Существование такой точки* $a_{k+l+1} \in \mathscr{E}^{(l+1)}$, *что* $\pi_{k+l+1,k+l}(a_{k+l+1}) = a_{k+l}$ *равносильно условию* $\tau_l(a_{k+l}) = 0$.

У п р а ж н е н и е 5.8. Выпишите координатные формулы для сечений τ_l. С их помощью докажите следующую лемму.

Л е м м а 5.9. *Если* $\tau_l = 0$ *на* $\mathscr{E}^{(l)}$, *то* $\tau_{l+1} = 0$ *на* $\mathscr{E}^{(l+1)}$.

Собирая вместе полученные результаты приходим к следующей фундаментальной теореме.

Т е о р е м а 5.10. *Если уравнение* $\mathscr{E}$ *инволютивно и проекция* $\pi_{k+1,k} \colon \mathscr{E}^{(1)} \to \mathscr{E}$ *является гладким расслоением, то* $\mathscr{E}$ *формально интегрируемо.*

6. Классификация интегральных многообразий распределения Картана

Пусть $P \subset \mathscr{C}(a_{k-1})$ — такое r-мерное подпространство, что $P \subset R(a_k)$ для некоторого $a_k \in F(a_{k-1})$. Множество $\ell(P) = \{\, a_k \in F(a_{k-1}) \mid P \subset R(a_k) \,\}$ называется *лучом*, соответствующим плоскости P. Из формулы (4.1) видно, что луч $\ell(P)$ — аффинное подпространство в $F(a_{k-1})$ с которым ассоциировано векторное пространство $S^k(\operatorname{Ann} P) \otimes V_a(L)$, где $\operatorname{Ann} P = \{\, \varphi \in T_a^*(L) \mid \varphi|_{(\pi_{k-1,0})_*(P)} = 0 \,\}$. Отсюда, в частности, следует, что $\dim \ell(P) = m\binom{k+n-r-1}{k}$.

П р и м е р 6.1. Если P — нульмерное подпространство, то $\ell(P) = F(a_{k-1})$.

П р и м е р 6.2. Если $P = R(a_k)$, то $\ell(P) = \{a_k\}$.

О п р е д е л е н и е 6.1. Интегральное многообразие распределения Картана называется *максимальным*, если никакое его открытое подмногообразие не содержится в интегральном многообразии большей размерности.

Пусть $V \subset J^k(E,n)$ — максимальное интегральное многообразие. Рассмотрим точку $a_k \in V$ в некоторой окрестности $\mathscr{U} \ni a_k$ которой ранг проекции $\pi_{k,k-1}|_V$ постоянен и равен r. Тогда $W = \pi_{k,k-1}(\mathscr{U})$ — интегральное многообразие распределения Картана в $J^{k-1}(E,n)$, трансверсально пересекающее слои проекции $\pi_{k-1,k-2}$ (такие многообразия мы называем *горизонтальными*). При отображении $\pi_{k,k-1}$ пара пространств $\mathscr{C}(a_k) \supset T_{a_k}(V)$ проектируется в пару $R(a_k) \supset T_{a_{k-1}}(W)$, поэтому $a_k \in \ell(T_{a_{k-1}}(W))$. Значит $V \subset \mathscr{L}(W) = \bigcup_{a_{k-1} \in W} \ell(T_{a_{k-1}}(W))$. Отсюда получаем следующее описание максимальных интегральных многообразий.

Т е о р е м а 6.1. *Всякое максимальное многообразие распределения Картана в окрестности любой точки, за исключением, быть может, некоторого множества меньшей размерности, представляет собой область в многообразии вида* $\mathscr{L}(W)$ *для некоторого горизонтального интегрального многообразия* $W \subset J^{k-1}(E,n)$.

Число $r = \dim W$ называется *типом* рассматриваемого интегрального многообразия.

П р и м е р 6.3. Интегральные многообразия типа 0 суть слои проекции $\pi_{k,k-1}$.

П р е д л о ж е н и е 6.2. *Максимальные интегральные многообразия типа* n *всюду, за исключением, возможно, некоторого множества меньшей размерности, локально представимы в виде* $L^{(k)}$ *для некоторого подмногообразия* $L \subset E$.

$\lhd$ Очевидно, что $\mathscr{L}(L^{(k-1)}) = L^{(k)}$. Требуемое утверждение доказывается индукцией по k. $\rhd$

Если V — максимальное интегральное многообразие типа r, то

$$\dim V = r + m\binom{k+n-r-1}{k}.$$

Отсюда вытекает

П р е д л о ж е н и е 6.3. *Пусть* V_1 *и* V_2 — *максимальные многообразия распределения Картана типа* r_1 *и* r_2 *соответственно. Если* $r_1 < r_2$, *то* $\dim V_1 \geqslant \dim V_2$, *причем равенство достигается лишь в трех случаях:*

1) $m = k = 1$;
2) $m = n = 1$;
3) $m = 1$, $r_1 = n - 1$, $r_2 = n$.

7. Преобразования Ли

Определение 7.1. Диффеоморфизм $f\colon J^k(E,n) \to J^k(E,n)$ называется *преобразованием Ли*, если он сохраняет распределение Картана, т.е. $f_*(\mathscr{C}_{a_k}) = \mathscr{C}_{f(a_k)}$, $\forall a_k \in J^k(E,n)$.

Пример 7.1. Поднятие $F^{(k)}\colon J^k(E,n) \to J^k(E,n)$ произвольного диффеоморфизма $F\colon E \to E$ является преобразованием Ли.

Обобщим этот пример. Рассмотрим некоторое преобразование Ли $f\colon J^k(E,n) \to J^k(E,n)$ и точку $a_{k+l} = [L]_a^{k+l} \in J^{k+l}(E,n)$. Если многообразие $f(L^{(l)})$ имеет в окрестности точки $f([L]_a^k) = [L_1]_{a'}^k$ вид $L_1^{(l)}$ для какого-то подмногообразия L_1, то положим $f^{(l)}(a_{k+l}) = [L_1]_{a'}^{k+l}$.

Упражнение 7.1. Проверьте, что $f^{(l)}$ определено на всюду плотном открытом подмножестве в $J^{k+l}(E,n)$ и является преобразованием Ли.

Теорема 7.1 (Ли–Бэклунд). *Если $m > 1$, то всякое преобразование Ли является поднятием некоторого диффеоморфизма многообразия E.*

Если $m = 1$, то всякое преобразование Ли является поднятием некоторого преобразования Ли пространства $J^1(E,n)$.

$\lhd$ Докажем сначала, что, за исключением случая $k = m = 1$, преобразования Ли пространства $J^k(E,n)$ переводят слои проекции $\pi_{k,k-1}$ друг в друга. Если $mn > 1$, то это сразу следует из предложения 6.3. В случае $m = n = 1$ требуемое утверждение вытекает из следующего упражнения.

Упражнение 7.2. Докажите, что если $m = n = 1$ и $k > 1$, то всякое векторное поле X на $J^k(E,1)$, лежащее в распределении Картана и являющееся симметрией распределения $[\mathscr{C},\mathscr{C}]$, порожденного коммутаторами полей из распределения Картана, касается слоев проекции $\pi_{k,k-1}$. (Напомним, что поле X называется *симметрией* некоторого распределения $\mathscr{F}$, если для каждого поля Y, лежащего в $\mathscr{F}$, коммутатор $[X,Y]$ также лежит в $\mathscr{F}$.)

Таким образом, всякое преобразование Ли F на J^k проектируется в некоторый диффеоморфизм F_1 пространства J^{k-1}. Очевидно, что F_1 является преобразованием Ли и $F = F_1^{(1)}$ (Проверьте!). Будем продолжать проектировать преобразования Ли до тех пор, пока не получим некоторое преобразование Ли на J^1 (в случае $m = 1$) или на J^0 (в случае $m > 1$). $\rhd$

В случае $m = k = 1$ пространство J^1 является контактным многообразием (см. §10), и понятие преобразования Ли совпадает с понятием контактного преобразования. Контактное преобразование необязательно поднимается с нулевых джетов.

Упражнение 7.3. Проверьте, что следующее преобразование, называемое *частичным преобразование Лежандра* или *преобразованием Эйлера*, является контактным и не является поднятием преобразования нулевых джетов:

$$(x_1, \ldots, x_n, u, u_1, \ldots, u_n) \mapsto (u_1, \ldots, u_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, u - x_1u_1 - \ldots - x_ku_k, -x_1, \ldots, -x_k, u_{k+1}, \ldots, u_n)$$

Поднятия контактных диффеоморфизмов (когда $m = 1$) определены, вообще говоря, не на всем пространстве $J^k(E,n)$. Избавиться от этого обстоятельства можно расширив пространства $J^k(E,n)$. А именно, рассмотрим множество $(k-1)$-джетов всех максимальных интегральных многообразий в $J^1(E,n)$. Такое «расширенное» J^k содержит прежнее J^k в качестве открытого всюду плотного подмножества.

Упражнение 7.4. Опишите аффинную структуру в слоях проекции $\pi_{k,k-1}$, если пространства джетов понимаются в новом расширенном смысле.

8. Характеристики распределений

Пусть $\mathscr{F}\colon x \in M \mapsto \mathscr{F}(x) \subset T_x(M)$ — q-мерное распределение на гладком многообразии M, $\dim \mathscr{F}(x) = q$. Обозначим через $D(\mathscr{F})$ $C^\infty(M)$-модуль всех векторных полей, лежащих в этом распределении, а через $\operatorname{Ann}(\mathscr{F}) \subset \Lambda^1(M)$ — $C^\infty(M)$-модуль всех 1-форм, обращающихся в нуль на $\mathscr{F}$.

Определение 8.1. Векторное поле $X \in D(\mathscr{F})$ называется *характеристическим*, если

$$i_X(d\omega) \in \operatorname{Ann}(\mathscr{F}) \qquad \forall \omega \in \operatorname{Ann}(\mathscr{F}).$$

В каждой точке $x \in M$ характеристические векторы образуют линейное пространство $\mathscr{F}_0(x)$. Предположим, что $\dim \mathscr{F}_0(x)$ не зависит от x, тогда мы получаем *характеристическое* распределение $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$.

По-другому характеристическое распределение можно описать как распределение подпространств, на которых вырождается *форма кривизны* $\Omega_{\mathscr{F}} \in \Lambda^2(\mathscr{F}^*) \otimes D(M)/D(\mathscr{F})$ распределения $\mathscr{F}$, определяемая равенством

$$\langle \Omega_{\mathscr{F}}(X, Y), \omega \rangle = d\omega(X, Y),$$

где X, $Y \in D(\mathscr{F})$, $\omega \in \operatorname{Ann}(\mathscr{F})$.

Упражнение 8.1. Проверьте корректность этого определения.

Замечание 8.1. Распределение вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда его форма кривизны равна нулю.

Предложение 8.1. *Поле $X \in D(\mathscr{F})$ является характеристическим тогда и только тогда, когда*

$$[X, Y] \in D(\mathscr{F}), \qquad \forall Y \in D(\mathscr{F}). \tag{8.1}$$

Произвольное поле $X \in D(M)$, удовлетворяющее (8.1), называется *симметрией* распределения, т.е. характеристические поля — это те векторные поля, которые лежат в распределении и являются его симметриями.

Множество характеристических полей образует идеал в алгебре Ли симметрий распределения. В частности, оно само является алгеброй Ли. Отсюда следует

Теорема 8.2. *Характеристическое распределение вполне интегрируемо.*

Интегральные многообразия характеристического распределения $\mathscr{F}_0$ называются *характеристиками* исходного распределения $\mathscr{F}$.

Если распределение $\mathscr{F}$ вполне интегрируемо, то $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}$. В общем случае имеет место следующая

Теорема 8.3. *Характеристическое поле распределения $\mathscr{F}$ касается каждого его максимального интегрального многообразия.*

$\triangleleft$ Если $N \subset M$ — интегральное многообразие и A_t — поток некоторого характеристического поля, то $\cup_t A_t(N)$ — также интегральное многообразие. $\triangleright$

Таким образом, максимальные интегральные многообразия распределения $\mathscr{F}$ «сотканы» из его характеристик.

Применим эти результаты к распределению Картана на дифференциальном уравнении. Пусть $a_k \in J^k(E, n)$ и $\Omega_{\mathscr{C}}|_{a_k} \in \Lambda^2(\mathscr{C}^*_{a_k}) \otimes T_{a_{k-1}}(J^{k-1}(E, n))/R(a_k)$ — форма кривизны распределения Картана в точке a_k. Нетрудно показать, что значения этой формы в действительности принадлежат подпространству $S^{k-1}(T^*_a(L)) \otimes V_a(L) \subset T_{a_{k-1}}(J^{k-1}(E, n))/R(a_k)$ (Проверьте!), так что можно написать $\Omega_{\mathscr{C}}|_{a_k} \in \Lambda^2(\mathscr{C}^*_{a_k}) \otimes S^{k-1}(T^*_a(L)) \otimes V_a(L)$. Эта форма называется *метасимплектической структурой* на уравнении $\mathscr{E}$. Ее значения вычисляются следующим образом.

Предложение 8.4. *Метасимплектическая структура обращается в нуль на подпространствах $R(a_{k+1})$ $\forall a_{k+1} \in F(a_k)$, и $T_{a_k}(F(a_{k-1}))$. Значение метасимплектической структуры на паре векторов $\xi(a_{k+1}) \in R(a_{k+1})$, $\xi \in T_a(L)$, и $\lambda \in T_{a_k}(F(a_{k-1})) = S^k(T^*_a(L)) \otimes V_a(L)$ равно $i_\xi \lambda$.*

$\triangleleft$ Для доказательства проверьте все утверждения в координатах. $\triangleright$

Теперь мы можем легко описать характеристики распределения Картана.

Теорема 8.5. *Пусть $\mathscr{E} \subset J^k(E,n)$ — формально интегрируемое уравнение. Тогда характеристические векторы распределения Картана $\mathscr{C}(\mathscr{E})$ на $\mathscr{E}$ в точке $a_k \in \mathscr{E}$ имеют вид $v(a_{k+1}) \in \mathscr{C}_{a_k}(\mathscr{E})$, где $a_{k+1} \in \mathscr{E}^{(1)}$, $v \in T_a(L)$, причем*

$$i_v\theta = 0 \qquad \forall\theta \in g(a_k) \subset S^k(T_a^*(L)) \otimes V_a(L).$$

Пример 8.1. Пусть $\mathscr{E} = \{F(x_i, u, u_i) = 0\}$ — скалярное уравнение первого порядка. Несложное вычисление показывает, что характеристическое распределение распределения Картана одномерно и порождается полем

$$Y_F = -\sum_i \frac{\partial F}{\partial u_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_i u_i\frac{\partial F}{\partial u_i}\frac{\partial}{\partial u} + \sum_i (\frac{\partial F}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial F}{\partial u})\frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Таким образом, решения уравнения $\mathscr{E}$ сотканы из интегральных кривых поля Y_F.

9. Интегрирование в квадратурах

Рассмотрим некоторое вполне интегрируемое распределение $\mathscr{F}$, $\operatorname{codim}\mathscr{F} = r$, на многообразии M, $\dim M = n$. Нас интересует вопрос об использовании симметрий для интегрирования такого распределения в квадратурах (т. е. при помощи вычисления неопределенных интегралов и решения функциональных уравнений).

Упражнение 9.1. Рассмотрим такое дифференциальное уравнение $\mathscr{E} \subset J^k(E,n)$, что для всех $s \geqslant l$ отображение $\pi_{s+1,s}\colon \mathscr{E}^{(s+1)} \to \mathscr{E}^{(s)}$ является диффеоморфизмом. Докажите, что распределение Картана на $\mathscr{E}^{(l+1)}$ вполне интегрируемо и имеет размерность n.

Рассматриваемый в этом упражнении класс уравнений включает в себя все обыкновенные уравнения и некоторые переопределенные уравнения в частных производных (например, $u_{xx} = u_{yy} = 0$). Таким образом, с точки зрения теории дифференциальных уравнений, мы рассматриваем задачу об интегрировании в квадратурах уравнений описанного вида (главным образом, обыкновенных).

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли симметрий распределения $\mathscr{F}$. Предположим, что она *невырождена*, в том смысле, что для каждой точки $x \in M$ естественное отображение $\chi_x\colon \mathfrak{g} \to T_x(M)/\mathscr{F}(x)$ является вложением. Предположим также, что $\dim\mathfrak{g} = \operatorname{codim}\mathscr{F} = r$, т. е. отображения χ_x являются изоморфизмами. В таком случае определена $\mathfrak{g}$-значная 1-форма $\omega \in \Lambda^1(M) \otimes \mathfrak{g}$, $\omega(X)(x) = \chi_x^{-1}(X_x \bmod \mathscr{F}(x))$. Ясно, что $\mathscr{F} = \ker\omega$.

Теорема 9.1. *Форма ω удовлетворяет уравнению Маурера–Картана*

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] = 0.$$

$\lhd$ Рассмотрим симметрии $X_1, \ldots, X_r$, образующие базис в алгебре $\mathfrak{g}$, $[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k$. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_r$ — компоненты формы ω в этом базисе, $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$. Они образуют базис в $\operatorname{Ann}\mathscr{F}$.

По теореме Фробениуса $d\omega_i = \sum_j \eta_{ij} \wedge \omega_j$, $\eta_{ij} \in \Lambda^1(M)$. Поскольку X_i — симметрии, то

$$L_{X_i}(\omega_j) = i_{X_i} d\omega_j = \sum_k \eta_{jk}(X_i)\omega_k - \eta_{ji} \in \operatorname{Ann}\mathscr{F}.$$

Следовательно, $\eta_{ij} \in \operatorname{Ann}\mathscr{F}$, т. е. $d\omega_i = \sum_{j<k} a_{jk}^i \omega_j \wedge \omega_k$. Отсюда $d\omega_i(X_j, X_k) = a_{jk}^i$. С другой стороны, $d\omega_i(X_j, X_k) = -\omega_i([X_j, X_k]) = -c_{jk}^i$. Таким образом, $d\omega_i = -\sum_{j<k} c_{jk}^i \omega_j \wedge \omega_k = -\frac{1}{2}[\omega,\omega]_i$. $\rhd$

Определение 9.1. *Первым интегралом распределения $\mathscr{F}$* называется такая функция $f \in C^\infty(M)$, что $X(f) = 0$ для любого поля X, лежащего в $\mathscr{F}$.

Равносильное определение: $df \in \operatorname{Ann}\mathscr{F}$.

Любое интегральное многообразие лежит на некоторой поверхности уровня первого интеграла, поэтому знание r независимых первых интегралов позволяет локально интегрировать распределение.

Доказанная только что теорема имеет следующее

Следствие 9.2. *Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ коммутативна, то r независимых первых интегралов могут быть найдены с помощью квадратур $f_i(x) = \int^x \omega_i$.*

В общем случае некоммутативной алгебры $\mathfrak{g}$ рассмотрим ее коммутант $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, и выберем базис $X_1, \ldots, X_r$ в $\mathfrak{g}$ так, чтобы поля $X_{s+1}, \ldots, X_r$ образовывали базис в $\mathfrak{g}^{(1)}$. Тогда локально $\omega_i = df_i$ при $i \leqslant s$. Рассмотрим поверхность уровня

$$M_c = \{f_1 = c_1, \ldots, f_s = c_s\}, \qquad c = (c_1, \ldots, c_s), \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Упражнение 9.2. Проверьте, что распределение $\mathscr{F}_c = \mathscr{F}|_{M_c}$ вполне интегрируемо, а $\mathfrak{g}^{(1)}$ — его невырожденная алгебра симметрий, причем $\dim \mathfrak{g}^{(1)} = \operatorname{coker} \mathscr{F}_c$.

Таким образом, мы можем рассмотреть коммутант $\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}]$ и повторить рассуждение еще раз и т. д. Если алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима, т.е. $\mathfrak{g}^{(N)} = 0$ при некотором N, то в итоге мы найдем r независимых полных интегралов.

Теорема 9.3. *Если вполне интегрируемое распределение коразмерности r обладает r-мерной невырожденной разрешимой алгеброй симметрий, то оно интегрируется в квадратурах.*

10. Контактная геометрия

Определение 10.1. *Контактной структурой* на многообразии M называется такое распределением $\mathscr{F}$, что $\operatorname{codim} \mathscr{F} = 1$ и $\dim \mathscr{F}_0 = 0$.

Иными словами, контактная структура — это распределение гиперплоскостей, которое локально может быть задано такой формой ω, что ограничение ее дифференциала на распределение $d\omega|_{\omega=0}$ невырождено.

Определение 10.2. Интегральные многообразия контактного распределения, имеющие максимальную размерность, называются *лежандровыми.*

Упражнение 10.1. Докажите, что

1) размерность контактного многообразия нечетна;
2) если $\dim M = 2n + 1$, то размерность лежандрова многообразия равна n.

Пример 10.1. Многообразие $M = J^1(E, n)$ в случае, когда $\dim E = n + 1$, является контактным многообразием.

Теорема 10.1 (Дарбу). *В окрестности каждой точки $x \in M$ контактного многообразия можно выбрать такую систему локальных координат $(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$, в которой контактная структура задается формой*

$$\omega = du - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n.$$

Эта теорема является частным случаем следующей более общей теоремы.

Теорема 10.2 (Дарбу). *Пусть $\omega \in \Lambda^1(M)$ — 1-форма на некотором многообразии M, $\dim M = n$, и ранг формы $d\omega$ равен $2r$. Если форма $\omega \wedge \underbrace{d\omega \wedge \ldots \wedge d\omega}_{r \text{ раз}}$ всюду отлична от нуля, то в окрестности каждой точки $x \in M$ можно выбрать такие координаты $(x_1, \ldots, x_r, u, p_1, \ldots, p_r, z_1, \ldots, z_{n-2r-1})$, в которых*

$$\omega = du - p_1\, dx_1 - \ldots - p_r\, dx_r.$$

Если форма $\omega \wedge \underbrace{d\omega \wedge \ldots \wedge d\omega}_{r \text{ раз}}$ всюду равна нулю, но $\omega \neq 0$, то вблизи каждой точки можно ввести систему координат, $(x_1, \ldots, x_n)$, в которой

$$\omega = (1 + x_1)\, dx_{r+1} + x_2\, dx_{r+2} + \ldots + x_r\, dx_{2r}.$$

$\triangleleft$ Рассмотрим первый случай. Очевидно, что распределение, определяемое формой ω, локально представляет собой произведение контактного $2r + 1$-мерного распределения на характеристическое тривиальное распределение. Следовательно, задача сводится к чисто контактному случаю. Выберем координату u вдоль интегральных кривых поля направлений $\ker d\omega$ так, чтобы $i_{\partial/\partial u}\omega = 1$. Координаты x_i и p_i выберем так, чтобы в точке x форма $d\omega$ имела вид $dx \wedge dp$. Точку x считаем началом координат. Тогда формы $\omega_t = \omega_0 + t(\omega - \omega_0)$, где $\omega_0 = du - p\, dx$, будут задавать контактные структуры в некоторой окрестности точки x при всех t. Будем искать семейство диффеоморфизмов φ_t, переводящих ω_t в ω_0,

$\varphi_t^*(\omega_t) = \omega_0$ («гомотопический метод», по-английски «path lifting method»). Для этого достаточно найти семейство X_t векторных полей, удовлетворяющих «гомологическому уравнению»

$$X_t(\omega_t) + \frac{\partial \omega_t}{\partial t} = X_t(\omega_t) + \omega - \omega_0 = 0.$$

Форма $\omega - \omega_0$ не содержит du, поэтому можно положить $X = Y - (i_Y \omega_t)\partial/\partial u$, где поле Y не содержит $\partial/\partial u$ и определяется уравнением $i_Y\, d\omega_t + \omega - \omega_0 = 0$.

Второе утверждение теоремы доказывается тем же методом. $\triangleright$

Упражнение 10.2. Убедитесь, что поле X_t гладко зависит от t.

Итак, все контактные многообразия одной размерности локально контактно диффеоморфны.

Определение 10.3. Симметрия $F\colon M \to M$ контактного распределения называется *контактным преобразованием*, а инфинитезимальная симметрия $X \in D(M)$ — *контактным полем.*

Однопараметрическая группа преобразований, отвечающая контактному полю состоит из контактных преобразований.

Некоторые примеры контактных преобразований были приведены в п. 7.

Предложение 10.3. *Любые два лежандровых многообразия локально контактно диффеоморфны.*

$\triangleleft$ Отождествим рассматриваемое контактное многообразие с многообразием первых джетов. Интегральные подмногообразия вида $L^{(1)}$ можно отождествить точечными преобразованиями (т. е. поднятиями преобразований нулевых джетов). Окрестность на произвольном лежандровом многообразии можно отобразить на многообразие вида $L^{(1)}$ преобразованием Эйлера. $\triangleright$

В случае, если контактная структура задается 1-формой ω, диффеоморфизм $F\colon M \to M$ является контактным, если $F^*(\omega) = \lambda\omega$ для некоторой функции λ.

Упражнение 10.3. Докажите, что векторное поле X является контактным если, и только если существует такая функция λ, что $L_X(\omega) = \lambda\omega$.

На произвольном контактном многообразии $(M, \mathscr{F})$ можно построить одномерное расслоение ζ, слоем которого над точкой $x \in M$ является фактор $T_x(M)\big/\mathscr{F}_x$. Каждое векторное поле на M определяет сечение этого расслоения, причем, как следует из определения контактной структуры, разным контактным полям отвечают разные сечения. Сечение, соответствующее контактному полю, называется его *производящим сечением.* В том случае, когда контактная структура задается 1-формой ω, расслоение ζ тривиализуется с помощью сечения, отвечающего контактному полю X_1, однозначно определяемому условиями

$$i_{X_1} d\omega = 0, \qquad i_{X_1}\omega = 1.$$

В стандартных координатах $X_1 = \partial/\partial u$. В такой ситуации производящее сечение превращается в *производящую функцию.* Полю X отвечает функция $f = \omega(X)$. Заметим, что существование формы ω равносильно тривиальности расслоения ζ.

Предложение 10.4. *Каждому сечению f расслоения ζ соответствует контактное поле X_f.*

$\triangleleft$ Достаточно рассмотреть случай, когда контактная структура задается 1-формой ω. Имеем

$$i_X(d\omega) = L_X(\omega) - d(i_X\omega) = \lambda\omega - df.$$

Подставив в обе части этого равенства поле X_1, получим $\lambda = X_1(f)$. Представим поле X в виде $X = fX_1 + Y$, где поле Y лежит в распределении, $\omega(Y) = 0$. На поле Y имеем условие $i_Y(d\omega) = X_1(f)\omega - df$, которое всегда разрешимо и однозначно определяет поле Y, а, значит, и X по функции f. $\triangleright$

Далее мы, как правило, рассматриваем контактные структуры, заданные 1-формой.

Упражнение 10.4. Рассмотрим контактное поле X_f на многообразии $J^1(N)$ 1-джетов функций на некотором многообразии N. Пусть $h \in C^\infty(N)$. Докажите, во-первых, что поток $A_t\colon J^1(N) \to J^1(N)$ поля X порождает локальный поток $h_t \in C^\infty(N)$ на пространстве функций на N: $[h_t]^1_x = A_t([h]^1_x)$, и, во-вторых, что скорость этого потока описывается производящей функцией поля X: $dh_t/dt|_{t=0}(x) = f([h]^1_x)$.

Упражнение 10.5. Докажите, что $X_{fg} = fX_g + gX_f - fgX_1$ и $X_f(f) = X_1(f)f$.

Упражнение 10.6. Докажите, что в стандартных координатах поле X_f имеет следующий вид:

$$X_f = -\sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i (f - p_i\frac{\partial f}{\partial p_i})\frac{\partial}{\partial u} + \sum_i (\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial f}{\partial u})\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Упражнение 10.7. Рассмотрим контактное поле X_f и контактное преобразование F, $F^*(\omega) = \lambda\omega$. Докажите, что $F_*(X_f) = X_g$ и $F^*(g) = \lambda f$.

Контактные поля образуют алгебру Ли. Установленное взаимнооднозначное соответствие между множеством контактных полей и пространством функций на контактном многообразии переносит структуру алгебры Ли на это пространство. Введенная таким образом скобка $\{\,,\}$ часто называется *скобкой Лагранжа* или *скобкой Эйлера*. Согласно определению, $\{f, g\} = \omega([X_f, X_g])$.

Упражнение 10.8. Докажите, что $\{f, g\} = X_f(g) - X_1(f)g$.

Последняя формула показывает, что данная скобка не задает пуассоновой структуры, т. к. не удовлетворяет правилу Лейбница. Если рассмотреть на контактном многообразии $J^1(N)$ функции, являющиеся поднятием функций с $T^*(N)$ (см. упр. 1.7), то для этих функций рассматриваемая скобка совпадет со скобкой Пуассона.

11. Инволютивные системы скалярных уравнений первого порядка

Рассмотрим уравнение $\mathscr{E} \subset J^1(N)$, $\operatorname{codim}\mathscr{E} = r$. Мы ограничиваемся джетами функций, поскольку будем изучать локальные свойства уравнений.

На пространстве $J^1(N)$ координата u глобально определена равенством $u([h]^1_x) = h(x)$. Контактная структура на $J^1(N)$ задается формой $\omega = du - \alpha$, где α — поднятие стандартной формы $\alpha = p\,dx$ с $T^*(N)$.

Пусть $\mathscr{E} = \{f_1 = 0, \dots, f_r = 0\}$, где $f_1, \dots, f_r$ — независимые функции на $J^1(N)$.

Упражнение 11.1. Докажите, что уравнение $\mathscr{E}$ регулярно в некоторой точке в том, и только в том случае, когда поля $X_{f_1}, \dots, X_{f_r}$ линейно независимы в этой точке.

Как и выше мы обычно предполагаем, что уравнение регулярно во всех рассматриваемых точках.

Далее нам понадобятся два простых утверждения из линейной симплектической геометрии. Напомним, что подпространство симплектического линейного пространства называется *коизотропным* (или *инволютивным*) если оно содержит свое косоортогональное дополнение.

Упражнение 11.2. Докажите, что подпространство симплектического пространства является коизотропным тогда и только тогда, когда в нем содержится лагранжево подпространство.

Упражнение 11.3. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ — линейно независимые ковекторы на симплектическом пространстве, задающие подпространство $\cap_{i=1}^r \ker\varphi_i$. Докажите, что это подпространство коизотропно тогда и только тогда, когда ковекторы φ_i попарно косоортогональны.

Определение 11.1. Уравнение $\mathscr{E}$ называется *инволютивным* (по Картану) в некоторой точке $x \in \mathscr{E}$ если $\mathscr{C}(\mathscr{E})_x$ является коизотропным подпространством в $\mathscr{C}(x)$.

Упражнение 11.4. Докажите, что уравнение $\mathscr{E} = \{f_1 = 0, \dots, f_r = 0\}$ инволютивно в точке x тогда и только тогда, когда $\{f_i, f_j\}(x) = 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant r$.

Пример 11.1. Уравнение коразмерности 1 всегда инволютивно.

Упражнение 11.5. Пусть $\mathscr{E}$ — инволютивное уравнение коразмерности r. Рассмотрим поток A_t некоторого контактного поля, которое не касается уравнения. Покажите, что $\mathscr{E}' = \cup_t A_t(\mathscr{E})$ является инволютивным уравнением коразмерности $r - 1$.

Мы переходим к доказательству следующего фундаментального утверждения.

Теорема 11.1 (Ли). *Любые две инволютивные системы уравнений первого порядка одинаковой коразмерности локально эквивалентны вблизи своих регулярных точек.*

Точное определение локальной эквивалентности состоит в следующем. Уравнения $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ коразмерности r в $J^1(N)$ *локально эквивалентны* в точках $x_1 \in \mathscr{E}_1$ и $x_2 \in \mathscr{E}_2$, если существуют окрестности $\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2 \subset J^1(N)$, $x_1 \in \mathscr{U}_1$, $x_2 \in \mathscr{U}_2$, и такой контактный диффеоморфизм $F\colon \mathscr{U}_1 \to \mathscr{U}_2$, $F(x_1) = x_2$, что $F(\mathscr{E}_1 \cap \mathscr{U}_1) = \mathscr{E}_2 \cap \mathscr{U}_2$.

Таким образом, в окрестности регулярной точки любое уравнение может быть сведено к уравнению $u_{x_1} = 0, \ldots, u_{x_r} = 0$.

$\triangleleft$ Не ограничивая общности предположим, что $x_1 = x_2 = x$. По теореме Дарбу существуют такие окрестности $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$ точки x и такой диффеоморфизм $F\colon \mathscr{E}_1 \cap \mathscr{U}_1 \to \mathscr{E}_2 \cap \mathscr{U}_2$, что $F^*(\omega_2) = \omega_1$, где $\omega_i = \omega|_{\mathscr{E}_i}$. Пусть $\rho\colon J^1(N) \to T^*(N)$ — естественная проекция.

Л е м м а 11.2. *Для любого уравнения $\mathscr{E}$ существует такой контактный диффеоморфизм G, $G(x) = x$, что дифференциал $(\rho|_{G(\mathscr{E})})_{*,x}$ является мономорфизмом.*

$\triangleleft$ Предположим, что $(\rho|_{\mathscr{E}})_{*,x}$ не является мономорфизмом, т. е. $X_1|_x \in T_x(\mathscr{E})$. Возьмем такую функцию f, что $f(x) \neq 0$ и $X_f|_x \notin T_x(\mathscr{E})$. По теореме Дарбу существует такой контактный диффеоморфизм G, что $G^*(\omega) = 1/f \cdot \omega$, $G(x) = x$. Тогда $G_*(X_f) = X_1$ (см. упр. 10.7), поэтому G — искомый диффеоморфизм. $\triangleright$

Доказанная лемма позволяет предположить, что отображения $(\rho|_{\mathscr{E}_i})_{*,x}$, $i = 1, 2$, являются мономорфизмами.

Рассмотрим случай $r = 1$. Мы можем считать, что отображения $\rho|_{\mathscr{E}_i \cap \mathscr{U}_i} : \mathscr{E}_i \cap \mathscr{U}_i \to \rho(\mathscr{U}_i)$ являются диффеоморфизмами и области $\rho(\mathscr{U}_i)$ односвязны. Тогда введенный выше диффеоморфизм F индуцирует канонический диффеоморфизм $\bar{F}\colon \rho(\mathscr{U}_1) \to \rho(\mathscr{U}_2)$ (Проверьте!), обладающий производящей функцией: $\bar{F}^*(\alpha) = \alpha + dS$. Определим контактное преобразование $\hat{F}\colon \mathscr{U}_1 \to \mathscr{U}_2$ формулой $\hat{F}(\theta, t) = (\bar{F}(\theta), t + S(\theta) - S(\rho(x)))$, где $\theta \in T^*(N)$, $t \in \mathbb{R}$. Нетрудно убедится, что это и есть искомое контактное преобразование.

Если $r > 1$, построим инволютивные уравнения $\mathscr{E}_i' \supset \mathscr{E}_i$, $i = 1, 2$, коразмерности $r - 1$ и локальный диффеоморфизм $F'\colon \mathscr{E}_1' \to \mathscr{E}_2'$, расширяющий F, $F'|_{\mathscr{E}_1} = F$, и устанавливающий эквивалентность контактных форм $\omega_i' = \omega|_{\mathscr{E}_i'}$, $(F')^*(\omega_2') = \omega_1'$. Для этого воспользуемся конструкцией из упр. 11.5, причем контактные поля X_{f_1} и X_{f_2}, используемые в построении, выберем так, чтобы $f_1|_{\mathscr{E}_1} = F^*(f_2|_{\mathscr{E}_2})$. Локальный диффеоморфизм F' определим формулой $F'(\theta) = A_t^2 \circ F \circ A_{-t}^1(\theta)$, где A_t^i — поток поля X_{f_i}, $A_{-t}^1(\theta) \in \mathscr{E}_1$.

У п р а ж н е н и е 11.6. Проверьте, что $(F')^*(\omega_2') = \omega_1'$ и отображения $(\rho|_{\mathscr{E}_i'})_{*,x}$, являются мономорфизмами.

Повторив описанное расширение уравнений $r - 1$ раз, мы придем к уравнениям коразмерности 1. $\triangleright$

12. Внутренняя и внешняя геометрия

Интегрирование дифференциального уравнения $\mathscr{E}$ можно понимать либо как построение интегральных многообразий распределения Картана $\mathscr{C}$ на J^k, лежащих на $\mathscr{E}$ (внешняя точка зрения), либо как построение интегральных многообразий распределения Картана $\mathscr{C}(\mathscr{E})$ (внутренняя точка зрения). Соответственно, *внешними симметриями* уравнения $\mathscr{E}$ называют преобразования Ли, сохраняющие подмногообразие $\mathscr{E}$, а его *внешними симметриями* — диффеоморфизмы многообразия $\mathscr{E}$, сохраняющие распределение Картана $\mathscr{C}(\mathscr{E})$.

Обозначим группу внешних симметрий уравнения $\mathscr{E}$ через $\mathrm{Sym}(\mathscr{E})$, а группу внутренних симметрий — через $\mathrm{Sym}_i(\mathscr{E})$. Пусть $\varkappa\colon \mathrm{Sym}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Sym}_i(\mathscr{E})$ — гомоморфизм ограничения внешней симметрии на $\mathscr{E}$. Если $\varkappa$ — эпиморфизм, то уравнение $\mathscr{E}$ называется *ординарным*. В этом случае внутренняя геометрия определяется внешней. Если $\varkappa$ — изоморфизм, то уравнение $\mathscr{E}$ называется *жестким*.

П р и м е р 12.1. Рассмотрим инволютивное скалярное уравнение первого порядка $\mathscr{E} = \{f_1 = 0, \ldots, f_r = 0\}$. Сдвиги вдоль траекторий контактного векторного поля $X_{f_1^2}$ тождественны на $\mathscr{E}$, так что в этом случае отображение $\varkappa$ имеет нетривиальное ядро.

У п р а ж н е н и е 12.1. Докажите, что инволютивные скалярные уравнения первого порядка являются ординарными.

П р и м е р 12.2. Для переопределенной системы $u_{xx}+u_{xy}=0$, $u_{xy}+u_{yy}=0$, любое поле вида $f(u_x+u_y)\partial/\partial u$ является внутренней симметрией. Эта симметрия не продолжается на все пространство джетов. Таким образом, данное уравнение не является ординарным.

Встречающиеся на практике определенные уравнения (за исключением скалярных уравнений первого порядка и обыкновенных уравнений) являются жесткими. Действительно, слои проекции $\pi_{k,k-1}|_{\mathscr{E}}$ суть интегральные многообразия распределения Картана. Если их можно охарактеризовать внутренним образом, то мы можем реконструировать многообразие J^{k-1}. Например, легко видеть, что для определенного уравнения (т.е. если $\operatorname{codim}\mathscr{E}=m$) эти слои и только они будут интегральными многообразиями максимальной размерности во всех случаях, кроме

1) $k=1$;
2) $n=1$;
3) $m=1$, $k=n=2$.

Предположим, что пространство J^{k-1} построено. Распределение Картана на нем можно восстановить, если в каждой точке $a_{k-1}\in J^{k-1}$ линейная оболочка пространств $(\pi_{k,k-1})_{a_k}(\mathscr{C}(\mathscr{E})_{a_k})$, $a_k\in F(a_{k-1})\cap\mathscr{E}$, совпадает с картановской плоскостью $\mathscr{C}_{a_{k-1}}$. Многообразие J^k будем понимать как многообразие R-плоскостей на J^{k-1}. Вложение $\mathscr{E}\to J^k$ можно восстановить, если для всех $a_k\in\mathscr{E}$ плоскости $(\pi_{k,k-1})_{*,a_k}(\mathscr{C}(\mathscr{E})_{a_k})$ n-мерны.

Таким образом, при выполнении трех сформулированных условий, уравнение оказывается жестким. Два последних условия выполняются для определенных уравнений «почти всегда».

У п р а ж н е н и е 12.2. Докажите, что первое условие имеет место «почти для всех уравнений» в случае $k=1$, $m>1$, $n>1$ и в случае $m=1$, $k=n=2$.

13. Теоремы существования Картана

Пусть $\mathscr{F}$ — распределение коразмерности s_0 на n-мерном многообразии M. Зафиксируем некоторую точку $a\in M$. Рассмотрим некоторый базис $\omega_1,\dots,\omega_{s_0}$ в $\operatorname{Ann}\mathscr{F}$ и 2-формы $\Omega_i=d\omega_i|_{\mathscr{F}(a)}$. Говорят, что два вектора $\xi_1,\xi_2\in\mathscr{F}$ находятся в *инволюции*, если $\Omega_i(\xi_1,\xi_2)=0$ для всех i. Подпространство $V\subset\mathscr{F}(a)$ называется *интегральным*, если любая пара векторов $\xi_1,\xi_2\in V$ находится в инволюции.

Полярной системой k-мерного интегрального пространства V назовем систему линейных уравнений

$$\omega_i(\eta)=0,\quad \Omega_i(\xi_j,\eta)=0\qquad i=1,\dots,s_0,\quad j=1,\dots,k$$

относительно вектора $\eta\in T_a(M)$, где $\xi_1,\dots,\xi_k$ — базис пространства V.

Ранг этой системы обозначим через $\operatorname{rank}(V)$. Очевидно, что $s_0\leqslant\operatorname{rank}(V)\leqslant n-s_0-k$.

Определим теперь в классе интегральных подпространств в $\mathscr{F}(a)$ подкласс *ординарных* подпространств, а в нем — подкласс *регулярных*:

$$\left\{\begin{matrix}\text{интегральные}\\ \text{подпространства}\end{matrix}\right\}\supset\left\{\begin{matrix}\text{ординарные}\\ \text{подпространства}\end{matrix}\right\}\supset\left\{\begin{matrix}\text{регулярные}\\ \text{подпространства}\end{matrix}\right\}.$$

Начнем с одномерных подпространств. Каждое одномерное подпространство интегрально и, по определению, ординарно. Пусть $\max\operatorname{rank}(V^1)=s_0+s_1$, где максимум берется по всем одномерным подпространствам. Назовем подпространство V^1 *регулярным*, если $\operatorname{rank}(V^1)=s_0+s_1$.

В общем случае k-мерное интегральное подпространство назовем *ординарным*, если оно содержит хотя бы одно регулярное $(k-1)$-мерное подпространство. Ординарное k-мерное подпространство V *регулярно*, если

$$\operatorname{rank}(V)=s_0+s_1+\ldots+s_k=\max_{V^k}\operatorname{rank}(V^k),$$

где максимуму берется по всем ординарным k-мерным подпространствам.

Число s_i называют *характером порядка* i рассматриваемого распределения в точке a. Ординарное k-мерное пространство существует только если

$$s_0+s_1+\ldots+s_{k-1}<n-k+1.$$

Число p, для которого выполняется равенство

$$s_0+s_1+\ldots+s_p=n-p,$$

называется *жанром* распределения в точке a.

Упражнение 13.1. Докажите, что $s_0 \geqslant s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_k \geqslant s_{k+1} \geqslant \ldots$.

Пример 13.1. Пусть $\mathscr{F}$ — вполне интегрируемое распределение. В этом случае все подпространства регулярны и $s_1 = s_2 = \ldots = 0$. Жанр равен $n - s_0$.

Пример 13.2. Пусть $\mathscr{F}$ — контактное распределение, $n = 2l + 1$. Тогда все интегральные подпространства регулярны, $s_0 = s_1 = s_2 = \ldots = s_l = 1$ и жанр равен l.

Пример 13.3. Пусть $\mathscr{F} = \mathscr{C}(\mathscr{E})$ — распределение Картана на скалярном уравнении второго порядка главного типа на двумерной плоскости, $\mathscr{E} \subset J^2(E, 2)$, $\dim E = 3$, $\operatorname{codim} \mathscr{E} = 1$. Здесь $s_0 = 3$, $s_1 = 2$ и жанр равен 2. Горизонтальное одномерное подпространство V регулярно, если соответствующий ему луч $\ell(V)$ не касается уравнения, а вертикальное — если оно не является лучом. Таким образом, в случае эллиптического уравнения все прямые регулярны. Двумерные подпространства всегда регулярны.

Упражнение 13.2. Пусть $\operatorname{Gr}(T_a(M), k)$ — грассманиан k-мерных подпространств в $T_a(M)$ и $\operatorname{Gri}(T_a(M), k) \subset \operatorname{Gr}(T_a(M), k)$ — грассманиан интегральных подпространств. Вычислите размерность $\operatorname{Gri}(T_a(M), k)$.

Ответ: $s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \ldots + (k-1)s_{k-1} + k\sigma_k$, где число σ_k определяется соотношением $s_1 + s_2 + \ldots + s_{k-1} + \sigma_k = n - k$.

От алгебраических рассмотрений в одной точке перейдем к построению интегральных многообразий в окрестности заданной точки.

Мы предположим, что M — аналитическое многообразие и $\mathscr{F}$ — аналитическое распределение. Пусть в точке $a \in M$ задано некоторое k-мерное ординарное пространство $V^k \subset \mathscr{F}(a)$. Наша цель — построить k-мерное интегральное многообразие, касающееся V^k.

Выберем в окрестности точки a координаты $x_1, \ldots, x_n$ так, чтобы векторы $\partial/\partial x_1|_a, \ldots, \partial/\partial x_{n-s_0}|_a$ образовывали базис в $\mathscr{F}(a)$, векторы $\partial/\partial x_1|_a, \ldots, \partial/\partial x_k|_a$ образовывали базис в V^k, и пространства, порожденные векторами $\partial/\partial x_1|_a, \ldots, \partial/\partial x_i|_a$, для всех $i < k$ были регулярны. Точка a — начало координат. Искомое интегральное многообразие можно определить уравнениями

$$x_{k+j} = f_j(x_1, \ldots, x_k) \qquad j = 1, \ldots, n-k.$$

Наша задача — найти функции f_j. Выпишем уравнения, которым должны удовлетворять эти функции. Обозначим через η_i форму ω_i, ограниченную на искомое интегральное многообразие (т. е. в соответствующих координатных выражениях координаты x_{k+j} заменены на f_j). Имеем следующие уравнения:

$$\begin{cases} \eta_i(\dfrac{\partial}{\partial x_1}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, s_0; \\ \eta_i(\dfrac{\partial}{\partial x_2}) = 0, \quad d\eta_i(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, s_0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_i(\dfrac{\partial}{\partial x_p}) = 0, \quad d\eta_i(\dfrac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dfrac{\partial}{\partial x_{j_2}}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, s_0, \quad j_1 < j_2 \leqslant p; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_i(\dfrac{\partial}{\partial x_k}) = 0, \quad d\eta_i(\dfrac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dfrac{\partial}{\partial x_{j_2}}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, s_0, \quad j_1 < j_2 \leqslant k \end{cases} \tag{13.1}$$

Предложение 13.1. *Все дифференциальные следствия данной системы являются алгебраическими следствиями самих уравнений системы и ее следствий, полученных дифференцированием уравнений лишь по переменным $x_1, \ldots, x_p$, где p — номер строки, в которой стоит дифференцируемое уравнение.*

$\triangleleft$ Утверждение легко доказывается применением следующих очевидных формул:

$$\frac{\partial}{\partial x_q}(\eta(\frac{\partial}{\partial x_j})) = d\eta(\frac{\partial}{\partial x_q}, \frac{\partial}{\partial x_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\eta(\frac{\partial}{\partial x_q}))$$

$$\frac{\partial}{\partial x_q}(d\eta(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(d\eta(\frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_q}) + \frac{\partial}{\partial x_l}(d\eta(\frac{\partial}{\partial x_q}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = 0$$

▷

С л е д с т в и е 13.2. *Пусть функции* $f_1(x_1,\dots,x_k),\dots,f_{n-k}(x_1,\dots,x_k)$ *обладают следующим свойством: для каждого* $i=1,\dots,k$ *функции* $f_j(x_1,\dots,x_i,0\dots,0)$ *удовлетворяют уравнениям, стоящим в* i*-й строчке системы* (13.1). *Тогда эти функции являются решением рассматриваемой системы.*

◁ В точке a левые части уравнений (13.1) и все их производные обращаются в нуль. ▷

П р е д л о ж е н и е 13.3. *Среди уравнений* i*-й строчки системы* (13.1), *рассматриваемых как линейные уравнения относительно* $\partial f_j/\partial x_i$, *содержится ровно* $s_0+s_1+\ldots+s_{i-1}$ *независимых уравнений.*

Из сказанного вытекают следующие фундаментальные теоремы существования.

Т е о р е м а 13.4 (Картан). *Пусть* M — *аналитическое многообразие и* $\mathscr{F}$ — *аналитическое распределение. Предположим, что*

$$s_0+s_1+\ldots+s_{k-1}=n-k.$$

Если через некоторую точку $a\in M$ *проходит* $k-1$*-мерное интегральное многообразие* V^{k-1}, *причем пространство* $T_a(V^{k-1})$ *регулярно, то в окрестности точки* a *существует единственное* k*-мерное интегральное многообразие, содержащее* V^{k-1}.

У п р а ж н е н и е 13.3. Проверьте, что в условиях теоремы существует единственное k-мерное интегральное пространство, содержащее V^{k-1}.

◁ Задача сводится к решению уравнений k-й строчки и мы можем применить теорему Коши–Ковалевской. ▷

Т е о р е м а 13.5 (Картан). *Пусть* M — *аналитическое многообразие и* $\mathscr{F}$ — *аналитическое распределение. Предположим, что*

$$s_0+s_1+\ldots+s_{k-1}<n-k.$$

Пусть V^k — k*-мерное ординарное пространство. Если через некоторую точку* $a\in M$ *проходит* $k-1$*-мерное интегральное многообразие* V^{k-1}, *причем пространство* $T_a(V^{k-1})$ *регулярно и содержится в* V^k,*то в окрестности точки* a *существует* k*-мерное интегральное многообразие, содержащее* V^{k-1} *и касающееся* V^k.

14. Инволютивность по Картану

Выше уже было введено понятие инволютивности по Картану для скалярных уравнений первого порядка ($m=k=1$). В этом разделе мы обратимся к случаю $mk>1$.

О п р е д е л е н и е 14.1. В случае $mk>1$, уравнение $\mathscr{E}$ называется *инволютивным* (по Картану) в некоторой точке, если в этой точке жанр распределения $\mathscr{C}(\mathscr{E})\geqslant n$ и существуют n-мерные ординарные подпространства, без вырождения проектирующиеся на $J^{k-1}(E,n)$.

У п р а ж н е н и е 14.1. Покажите, что если уравнение инволютивно в некоторой точке, то множество n-мерных ординарных подпространств, без вырождения проектирующихся на $J^{k-1}(E,n)$, совпадает с множеством R-плоскостей, касающихся уравнения в данной точке.

Рассмотрим некоторую точку $a_k\in\mathscr{E}$. Пусть $V\subset\mathscr{C}(\mathscr{E})_{a_k}$ — интегральное подпространство. Назовем *приведенной полярной системой* пространства V ограничение его полярной системы на слой $F(a_{k-1})$. Определим *приведенные характеры* $s_0',\ \ldots,\ s_{n-1}'$ в точке a_k следующим образом. Положим $s_0'=s_0$. Числа s_i' для $i=1,\dots,n-1$ определим точно так же, как выше мы определяли характеры s_i, но вместо полярных систем будем рассматривать приведенные полярные системы. Ясно, что $s_i'\leqslant s_i$.

Введем также число s_n' (которое не является характером) с помощью соотношения

$$s_0'+s_1'+\ldots+s_{n-1}'+s_n'=\dim\mathscr{E}-n=\dim g,$$

где g — символ в рассматриваемой точке.

Следующее важное предложение легко выводится из определений.

П р е д л о ж е н и е 14.1. *Уравнение инволютивно в некоторой точке тогда и только тогда, когда* $s_1'=s_1,\ \ldots,\ s_{n-1}'=s_{n-1}$.

В символе $g \subset S^k(T^*(L)) \otimes V_a(L)$ выделим подпространства $g_i \subset g$, состоящие из многочленов, независящих от переменных $dx_1, \ldots, dx_i$. Иными словами $g_i = \{\, \chi \in g \mid \delta_1(\chi) = \ldots = \delta_i(\chi) = 0 \,\}$, где δ_j — производная по dx_j.

Предположим, что наше уравнение инволютивно в точке a_k и $R(a_{k+1})$ — R-плоскость, касающаяся уравнения. Она ординарна, поэтому можно так выбрать координаты, чтобы векторы $\partial/\partial x_1|_{a_k}, \ldots, \partial/\partial x_i|_{a_k}$ при всех $i < n$ порождали регулярные подпространства.

Упражнение 14.2. Вычислите размерности пространств g_i при указанном выборе координат.
Ответ: $\dim g_i = s'_i + s'_{i+1} + \ldots + s'_{n-1} + s'_n$.

Сопоставляя результат этого упражнения с результатами упр. 13.2 и 14.1 и предл. 14.1, мы приходим к следующему полезному на практике критерию инволютивности.

Предложение 14.2 (инволютивность по Кураниши). *Уравнение инволютивно в данной точке тогда и только тогда, когда существует такая система координат, что*

$$\dim g^{(1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \dim g_i.$$

Замечание 14.1. Таким образом, можно говорить об инволютивности символа, а не уравнения в точке.

Упражнение 14.3. Убедитесь, используя последнее предложение, что «пустое» уравнение $\mathscr{E} = J^k(E, n)$ инволютивно.

Упражнение 14.4. Рассмотрим такое уравнение $\mathscr{E}$, что для каждой точки $a_k \in \mathscr{E}$ существует ковектор $\xi \in T^*_a(L)$, для которого отображение $\sigma_\xi \colon V \to V_1$, где $\sigma_\xi(v) = \sigma(\xi^k \otimes v)$ эпиморфно (можно назвать такое уравнение «непереопределенным»). Докажите, что такое уравнение инволютивно.
Указание: рассмотрите линейную замену координат $\bar{x}_i = \sum_j a_i^j x_j$, где $a_n^1, \ldots, a_n^n$ — координаты того ковектора ξ, для которого σ_ξ эпиморфно.

Теорема существования Картана говорит, что инволютивное вещественно-аналитическое уравнение локально разрешимо. Следующий пример, принадлежащий Леви, показывает, что гладкое инволютивное уравнение может быть неразрешимо.

Пример 14.1. Уравнение Леви содержит 3 независимых переменных x_1, x_2, x_3 и две зависимые: u^1 и u^2. Используя комплексные обозначения $z = x_1 + ix_2$, $u = u^1 + iu^2$, его можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + iz\frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{f(x_3)}{2},$$

где $f(x_3)$ — вещественная, гладкая, но не аналитическая функция. Докажем, что это уравнение локально неразрешимо. Положим $z = \sqrt{\alpha} \cdot e^{i\varphi}$ и $w = \alpha + ix_3$. Прямое вычисление показывает, что

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \int_0^{2\pi} zu\, d\varphi = \frac{\pi}{2} f(x_3).$$

Обозначим $G(w) = \int_0^{2\pi} zu\, d\varphi$ и $F(x_3) = \frac{\pi}{2} \int f(x_3)\, dx_3$. Таким образом, функция $G + iF$ аналитична в области $0 \leqslant \alpha < \varepsilon_1$, $-\varepsilon_2 < x_3 < \varepsilon_2$. Вещественная часть функции G тривиальна при $\alpha = 0$, так что функцию $G + iF$ можно продолжить по другую сторону оси x_3. Это противоречит предположению, что f не аналитична.

Наша цель теперь — доказать, что инволютивность по Картану влечет инволютивность по Спенсеру. Из критерия инволютивности Кураниши легко следует

Предложение 14.3. *Уравнение инволютивно в данной точке тогда и только тогда, когда существует такая система координат, что следующие последовательности точны:*

$$0 \to g_i^{(1)} \to g_{i-1}^{(1)} \xrightarrow{\delta_i} g_{i-1} \to 0.$$

Теорема 14.4. *Если символ g инволютивен, то инволютивны и все его продолжения $g^{(l)}$.*

◁ Мы должны доказать, что если отображение $\delta_i\colon g_{i-1}^{(1)} \to g_{i-1}$ сюрьективно, то и отображения $\delta_i\colon g_{i-1}^{(l+1)} \to g_{i-1}^{(l)}$ сюрьективны. Заметим, что отображение $\delta_i\colon g_{i-1}^{(l+1)} \to g_{i-1}^{(l)}$ сюрьективно тогда и только тогда, когда сюрьективно отображение $\sigma^{(l+1)}\colon (S^{k+l+1}\otimes V)_i \to (\sigma^{(l+1)}(S^{k+l+1}\otimes V))_i$. Это нетрудно показать с помощью следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & g_i^{(l+1)} \arrow[r] \arrow[d] & (S^{k+l+1}\otimes V)_i \arrow[r, "\sigma^{(l+1)}"] \arrow[d] & (\sigma^{(l+1)}(S^{k+l+1}\otimes V))_i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & g_{i-1}^{(l+1)} \arrow[r] \arrow[d, "\delta_i"'] & (S^{k+l+1}\otimes V)_{i-1} \arrow[r, "\sigma^{(l+1)}"] \arrow[d, "\delta_i"'] & \sigma^{(l+1)}((S^{k+l+1}\otimes V)_{i-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta_i"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & g_{i-1}^{(l)} \arrow[r] \arrow[d] & (S^{k+l}\otimes V)_{i-1} \arrow[r, "\sigma^{(l)}"] \arrow[d] & \sigma^{(l+1)}((S^{k+l}\otimes V)_{i-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Теперь утверждение теоремы можно доказать индукцией, используя диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (S^{k+l+1}\otimes V)_i \arrow[r] \arrow[d, "\sigma^{(l+1)}"'] & (S^{k+l+1}\otimes V)_{i-1} \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d, "\sigma^{(l+1)}"'] & (S^{k+l}\otimes V)_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma^{(l)}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\sigma^{(l+1)}(S^{k+l+1}\otimes V))_i \arrow[r] & (\sigma^{(l+1)}(S^{k+l+1}\otimes V))_{i-1} \arrow[r, "\delta_i"] & (\sigma^{(l)}(S^{k+l}\otimes V))_{i-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

▷

Теорема 14.5. *Инволютивность по Картану влечет инволютивность по Спенсеру.*

◁ Надо доказать точность δ-комплекса Спенсера. Будем проводить индукцию по n. Пусть $\omega \in g^{(l-i)}\otimes \Lambda^i$ и $\delta\omega = 0$. Разложим ω на два слагаемых $\omega = \omega' + \omega''$, первое из которых не содержит dx_1. Существует такой элемент $\eta \in g^{(l-i+1)}\otimes\Lambda^{i-1}$, что $\omega'' = dx_1 \wedge \delta_1\eta$. Элемент $\omega - \delta\eta$ не содержит переменной x_1 и, следовательно, точен по предположению индукции. ▷

15. Классификация меток геометрических особенностей

Определение 15.1. Максимальное интегральное многообразие типа n в $J^k(E,n)$ называется *R-многообразием.*

Замечание 15.1. В случае $m = k = 1$ (контактная геометрия) понятие типа не определено даже локально. В этом случае R-многообразие — то же самое, что лежандрово многообразие.

Если ограничение проекции $\pi_{k,k-1}$ на некоторое R-многообразие является иммерсией, то это многообразие имеет вид $L^{(k)}$.

Упражнение 15.1. Приведите примеры R-многообразий, не имеющих вида $L^{(k)}$.

Многозначным решением уравнения $\mathscr{E} \subset J^k(E,n)$ называется R-многообразие, лежащее в одном из продолжений $\mathscr{E}^{(l)}$.

Пусть V — R-многообразие. Его *геометрическими особенностями* называют особые точки проекции $\pi_{k,k-1}|_V$ (т.е. те точки, в которых ядро дифференциала этой проекции нетривиально). Касательная плоскость к R-многообразию в особой точке называется *особой R-плоскостью.*

Наша ближайшая цель — получить классификацию особых R-плоскостей относительно преобразований Ли.

Пусть $R = T_{a_k}(V)$ — особая R-плоскость. Ее подпространство $R_0 = R\cap T_{a_k}(F(a_{k-1})) = \ker\,(\pi_{k,k-1})_*|_V$ называется *меткой* данной R-плоскости.

Упражнение 15.2. Пусть $P = (\pi_{k,k-1})_*(R)$. Докажите, что $R_0 \subset \ell(P)$.

Рассмотрим некоторое пространство $P \subset R(a_k)$, $\dim P = s \leqslant n$. Его можно задать указав такую пару подмногообразий $W \subset L$ в E, что $\dim W = s$, $\dim L = n$, $a_k = [L]_a^k$, $(\pi_{k-1,0})_*(P) = T_a(W)$. Это замечание показывает, в частности, что любые два горизонтальных пространства одной размерности эквивалентны относительно преобразований Ли.

Рассмотрим две особые R-плоскости R_1 и R_2, метки которых имеют одинаковую размерность. Отождествим с помощью преобразования Ли их проекции P_1 и P_2, $P_i = (\pi_{k,k-1})_*(R_i)$, $i = 1, 2$. Плоскости R_1 и R_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны их метки, лежащие внутри $\ell(P_1) = \ell(P_2)$.

Заметим, что любой луч $\ell(P)$, отвечающий пространству P, $\dim P = s$, которое задается парой подмногообразий $W \subset L$, можно отождествить со слоем проекции $\alpha_{k,k-1}\colon J^k(\alpha) \to J^{k-1}(\alpha)$, где $\alpha\colon \mathbb{R}^{m+n-s} \to \mathbb{R}^{n-s}$ — тривиальное расслоение. Действительно, выберем координаты так, чтобы многообразие L задавалось уравнениями $u^j = 0$, $j = 1, \ldots, m$, а W — уравнениями $u^j = 0$, $j = 1, \ldots, m$, $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, s$. Тогда точка $[L']_a^k$ лежит в $\ell(P)$ в том и только в том случае, когда многообразие L' можно задать в виде $u^j = f^j(x)$ так, что все производные функций f^j порядка $< k$, а также все производный порядка k по переменным $x_1, \ldots, x_s$ равны нулю.

Упражнение 15.3. Убедитесь, что при описанном отождествлении преобразованиям Ли отвечают преобразования Ли.

Итак, задачу о классификации особых R-плоскостей относительно преобразований Ли достаточно решить в случае, когда размерность метки равна n (т.е. R-плоскость и ее метка совпадают).

Упражнение 15.4. Докажите, что все особые R-плоскости с одномерными метками эквивалентны.

Упражнение 15.5. Опишите классы эквивалентности особых R-плоскостей с двумерными метками в случае $m = 1$, $k = 2$.

Пусть $f \in S^{k+1}(T_a^*(L)) \otimes V_a(L)$. Обозначим через Π_f подпространство в $S^k(T_a^*(L)) \otimes V_a(L)$ порожденное элементами $i_\xi f$, $\xi \in T_a(L)$. Назовем элемент f *невырожденным*, если $\dim \Pi_f = n$.

Теорема 15.1. *Если $\Pi \subset T_{a_k}(F(a_{k-1})) = S^k(T_a^*(L)) \otimes V_a(L)$ — вертикальная R-плоскость в общем положении, то существует n таких линейно независимых невырожденных элементов $f_1, \ldots, f_n \in S^{k+1}(T_a^*(L)) \otimes V_a(L)$, что $\Pi = \Pi_{f_i}$ для всех $i = 1, \ldots, n$.*

Замечание 15.2. Неясно, является ли приведенное в теореме условие достаточным. Назовем плоскости $\Pi = \Pi_{f_1} = \ldots = \Pi_{f_n}$, описанные в теореме *метками*. Таким образом, теорема утверждает, что метки особых R-плоскостей являются метками.

$\lhd$ Пусть $\Pi = T_{a_k}(V)$, где V — R-многообразие и a_k — его особая точка. Рассмотрим n таких путей $\gamma_i\colon [0,1] \to V$, $i = 1, \ldots, n$, что $\gamma_i(0) = a_k$, точки $\gamma_i(t)$ при $t > 0$ неособые и векторы $d\gamma_i/dt|_{t=0}$ линейно независимы. Определим кривые $\tilde{\gamma}_i\colon (0,1] \to J^{k+1}$ формулой $R(\tilde{\gamma}_i(t)) = T_{\gamma(t)}(V)$. Простые координатные вычисления показывают, что эти кривые обладают вертикальными асимптотами при $t \to 0$. Образующие этих асимптот и есть искомые элементы f_i. $\rhd$

Опишем классы эквивалентности особых R-плоскостей с двумерными метками в случае $m = 1$ и произвольном k.

Упражнение 15.6. Докажите, что пространство Π_f является меткой тогда и только тогда, когда вторые производные многочлена f линейно зависимы.

Упражнение 15.7. Докажите, что если Π — метка, то существует ровно два таких линейно независимых многочлена f и g, что $\Pi_f = \Pi_g = \Pi$.

Таким образом, метке $\Pi_f = \Pi_g = \Pi$ можно сопоставить линейную оболочку Π' многочленов f и g.

Упражнение 15.8. Докажите, что существуют такие линейно независимые многочлены φ и ψ, что $\Pi' = \Pi_\varphi = \Pi_\psi$.

Описанным способом мы получаем цепочку Π, Π', Π'', … меток в J^k, J^{k+1}, J^{k+2}, …

Упражнение 15.9. Докажите, что если Π — метка и $f \in \Pi$ — невырожденный элемент, то Π_f — тоже метка, причем она не зависит от выбора f.

Таким образом, цепочку меток можно продолжить вниз до $k = 2$, т.е. классификация двумерных меток сводится к случаю $k = 2$ (см. упр. 15.5).

16. Уравнение особенностей

Выберем некоторый класс эквивалентности r-мерных меток Σ.

Определение 16.1. *Σ-загибом* в точке $a_k \in J^k(E, n)$ назовем такое n-мерное пространство $R \subset \mathscr{C}(a_k)$, что

1) пространство $R_0 = \ker((\pi_{k,k-1})_*|_R) = R \cap T_{a_k}(F(a_{k-1}))$ является меткой из класса Σ;
2) $R_0 \subset T_{a_k}(\ell(P))$, где $P = (\pi_{k,k-1})_*(R)$.

Рассмотрим некоторое уравнение $\mathscr{E}$. Пусть R — Σ-загиб в точке $a_k \in \mathscr{E}$ и $P = (\pi_{k,k-1})_*(R) \subset T_{a_{k-1}}(\mathscr{E}')$ — его проекция на $\mathscr{E}' = \pi_{k,k-1}(\mathscr{E})$. Пространство P можно отождествить с точкой многообразия $J^1(\mathscr{E}', n - r)$. Совокупность всех пространств, являющихся проекциями Σ-загибов образует подмножество $\mathscr{E}_\Sigma \subset J^1(\mathscr{E}', n - r)$, называемое *уравнением Σ-особенностей* уравнения $\mathscr{E}$. Если Σ состоит из всех 1-мерных меток, то уравнение особенностей обозначается через $\mathscr{E}_{[1]}$.

Обозначим через $\operatorname{sing}_\Sigma(V)$ подмножество R-многообразия V, состоящее из тех точек, в которых имеется Σ-загиб.

Предложение 16.1. *Если $V \subset \mathscr{E}$ — решение уравнения $\mathscr{E}$, то $\pi_{k,k-1}(\operatorname{sing}_\Sigma(V))$ — решение уравнения $\mathscr{E}_\Sigma$.*

Пусть $W \subset \mathscr{E}_\Sigma$ — решение уравнения особенностей $\mathscr{E}_\Sigma$. Рассмотрим множество $\widetilde{W}$ всех таких Σ-загибов R в точках $a_k \in \mathscr{E}$, что $R \subset T_{a_k}(\mathscr{E})$ и $(\pi_{k,k-1})_*(R) = T_{a_{k-1}}(W)$. Нетрудно показать, что если уравнение $\mathscr{E}$ удовлетворяет некоторым условиям регулярности и формальной интегрируемости, то проекция $\widetilde{W} \to W$ обладает секущей поверхностью, которая имеет вид $\operatorname{sing}_\Sigma(V)$ для некоторого, возможно, формального, решения уравнения $\mathscr{E}$.

Пусть $a_k \in \mathscr{E}$, $a_k = [L]_a^k$ и $\xi \in T_a^*(L)$ — некоторый ненулевой ковектор. Рассмотрим ковектор $\xi' = (\pi_{k-1})^*(\xi) \in R(a_k)^*$ и луч $\ell(\operatorname{Ann}(\xi'))$, $\operatorname{Ann}(\xi') \subset R(a_k)$. Если $\dim T_{a_k}(\ell(\operatorname{Ann}(\xi'))) \cap T_{a_k}(\mathscr{E}) > 0$, то ковектор ξ называется *характеристическим ковектором уравнения $\mathscr{E}$* в рассматриваемой точке.

Упражнение 16.1. Проверьте, что $\ell(\operatorname{Ann}(\xi')) = \{\, a_k + \xi^k \otimes v \mid v \in V_a(L) \,\}$.

Упражнение 16.2. Покажите, что в координатах условие характеристичности ковектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет вид:

$$\operatorname{rank} \left\| \sum_{|\sigma|=k} \frac{\partial F_i}{\partial u_\sigma^j}\bigg|_{a_k} \cdot \xi_\sigma \right\| < m.$$

Предложение 16.2. *Уравнение особенностей $\mathscr{E}_{[1]}$ состоит из плоскостей вида $\operatorname{Ann}(\xi')$ для всех характеристических ковекторов уравнения $\mathscr{E}$ во всех точках $a_k \in \mathscr{E}$.*

Уравнение $\mathscr{E}$ называется *эллиптическим в точке $a_k \in \mathscr{E}$*, если в этой точке нет характеристических ковекторов. Уравнение называется *эллиптическим*, если оно эллиптично во всех точках.

Следствие 16.3. *Для эллиптического уравнения $\mathscr{E}$ уравнение особенностей $\mathscr{E}_{[1]}$ пусто.*

Пример 16.1. Пусть $\mathscr{E} \in J^1(E, n)$ — одно скалярное уравнение первого порядка, $\dim E = n + 1$, $\operatorname{codim} \mathscr{E} = 1$. В этом случае все метки одной размерности эквивалентны. Обозначим через $\mathscr{E}_{[r]}$ уравнение особенностей, отвечающее r-мерным меткам.

Упражнение 16.3. Пусть $a \in J^0$. Огибающая семейства гиперплоскостей $R(a_1)$, $a_1 \in \mathscr{E}$, в $T_a(J^0)$ называется *конусом Монжа* в точке a. Докажите, что конус Монжа образован проекциями характеристических векторов.

Упражнение 16.4. Докажите, что $\mathscr{E}_{[r]}$ состоит из $n-r$-мерных подпространств касающихся конусов Монжа уравнения $\mathscr{E}$.

Отсюда, в частности, видно, что по уравнению особенностей $\mathscr{E}_{[r]}$ можно однозначно восстановить исходное уравнение $\mathscr{E}$.

17. Уравнение особенностей для скалярного уравнения второго порядка на плоскости

Опишем уравнение особенностей $\mathscr{E}_{[1]}$. Оно представляет собой некоторое поле конусов $Q(a_1)$ на J^1 размерности 3 (невырожденная ситуация) или 2 (вырожденная ситуация).

Упражнение 17.1. Покажите, что эти конусы суть проекции прямых, являющихся пересечениями касательных плоскостей к уравнению $T_{a_2}(\mathscr{E})$ с конусом вырожденных форм.

Таким образом, в вырожденном случае слой $\mathscr{E}(a_2) = \mathscr{E} \cap F(a_1)$ гиперболического уравнения является дважды линейчатой и, поэтому, квадратичной поверхностью. Иначе говоря, $\mathscr{E}$ — уравнение Монжа–Ампера. Напомним, что *уравнением Монжа–Ампера* называют такое уравнение второго порядка, которое задается некоторой n-формой ω на J^1, $a_k = [L]_a^k \in \mathscr{E} \iff (\omega|_{L^{(1)}})_{a_k} = 0$. (Выпишите это условие в координатах!).

Теорема 17.1. *Гиперболическое уравнение второго порядка является уравнением Монжа–Ампера тогда и только тогда, когда его уравнение особенностей $\mathscr{E}_{[1]}$ вырождено.*

Упражнение 17.2. Докажите, что в вырожденном гиперболическом случае конусы $Q(a_1)$ имеют вид $Q(a_1) = P_1(a_1) \cup P_2(a_1)$, где $P_1(a_1)$ и $P_2(a_1)$ суть нелагранжевы косоортогональные двумерные пространства в картановской плоскости.

Упражнение 17.3. Докажите, что в вырожденном параболическом случае конусы $Q(a_1)$ представляют собой лагранжевы пространства в картановской плоскости.

Упражнение 17.4. Докажите, что L является решением уравнения $\mathscr{E}$ тогда и только тогда, когда $\dim T_{a_1}(L^{(1)}) \cap P_i(a_1) = 1$, $i = 1, 2$, (в вырожденном гиперболическом случае) или $\dim T_{a_1}(L^{(1)}) \cap Q(a_1) = 1$ (в вырожденном параболическом случае).

Упражнение 17.5. Докажите, что в вырожденном случае любое гиперболическое или параболическое уравнение определяется своим уравнением особенностей.

Рассмотрим невырожденный случай.

Введем следующую терминологию. Пусть Q — коническая гиперповерхность в симплектическом пространстве. *Двойственным* к ней назовем конус Q', составленный из косоортогональных дополнений к касательным плоскостям $T_q(Q)$. При этом говорят, что прямые $\ell_q = \{tq \mid t \in \mathbb{R}\} \subset Q$ и $\ell'_q = T_q(Q)^{\perp}$, $q \in Q$, $q \neq 0$, образуют *дуальную пару*.

Упражнение 17.6. Докажите, что в невырожденном гиперболическом случае $Q(a_1) = Q^{+}(a_1) \cup Q^{-}(a_1)$, где Q^{+} — произвольный конус, а Q^{-} — двойственный к нему.

Упражнение 17.7. Докажите, что уравнение особенностей параболического уравнения всегда вырожденно.

Упражнение 17.8. Докажите, что L — решение уравнения $\mathscr{E}$ с невырожденным уравнением особенностей тогда и только тогда, когда касательные плоскости $T_{a_1}(L^{(1)})$ пересекают конусы $Q^{\pm}$ по дуальной паре.

Итак, уравнение $\mathscr{E}^{(1)}$ всегда определяетет $\mathscr{E}$.

Библиография

[1] Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. — «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления», Т. 28, М.: ВИНИТИ, 1988.

[2] Виноградов А. М. Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений. — «Проблемы геометрии», Т. 11, М.: ВИНИТИ, 1980, с. 89–134.

[3] Виноградов А. М. Геометрические особенности решений дифференциальных уравнений (неопубл.).

[4] Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.

[5] Картан Э. Интегральные инварианты: пер. с фр. — М.-Л.: Гостехиздат, 1940; М.: Изд-во «Эдиториал УРСС», 2-е изд., 1998.

[6] Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения: пер. с фр. — М.: Изд-во МГУ, 1962.

[7] Лычагин В. В. Геометрическая теория особенностей решений нелинейных дифференциальных уравнений. — «Проблемы геометрии», Т. 20, М.: ВИНИТИ, 1988, с. 207–247.

[8] Поммаре Ж. Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли: пер. с англ. — М.: Мир, 1983.

[9] Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. — М.-Л.: Гостехиздат, 1947.

[10] Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А. В. Бочаров, А. М. Вербовецкий, А. М. Виноградов, С. В. Дужин, И. С. Красильщик, А. В. Самохин, Ю. Н. Торхов, Н. Г. Хорькова, В. Н. Четвериков / Под ред. А. М. Виноградова и И. С. Красильщика. — М.: Изд-во «Факториал», 1997.

[11] Спенсер Д. Переопределенные системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных. — Математика (сб. переводов), 1970, т. 14, Э2, с. 66–90; т. 14, Э3, с. 99–126.

[12] Duzhin S. V. and Lychagin V. V. Symmetries of distributions and quadrature of ordinary differential equation. — Acta Appl. Math. **24** (1991), 29–57.

[13] Lychagin V. V. Singularities of multivalued solutions of nonlinear differential equations, and nonlinear phenomena. — Acta Appl. Math. **3** (1985), 135–173.

[14] Lychagin V. V. Lectures on geometry of differential equations. — Part I, Roma: Quaderni CNR (GNFM); Part II, Roma: Quaderni Dip. MeMoMat Univ. “La Sapienza”, 1992.

[15] Vinogradov A. M. Geometric singularities of solutions of nonlinear partial differential equations. — Differential Geometry and Its Applications, Proc. Conf. Brno (Czechoslovakia), 1986, Brno: J. E. Purkyně Univ. and Dordrecht: Reidel, 1987, pp. 359–379.

[16] Vinogradov A. M. An informal introduction to the geometry of jet spaces. — Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari Suppl. **58** (1988), 301–333.