Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 8 сентября 1999 года

Определения. Подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *гладким подмногообразием* размерности m, если для каждой точки $\mathbf{x} \in M$ существует ее окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$ такая, что

1. $M \cap U$ задается системой уравнений
$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_{n-m}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases},$$
у которой ранг матрицы частных производных $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right)$ максимален (говорят, что M — класса C^k, бесконечно дифференцируемое или аналитическое, если функции f_i имеют соответствующий класс гладкости);

2. $M \cap U$ однозначно проектируется на одну из m-мерных координатных плоскостей, а оставшиеся $n - m$ координат выражаются через данные как гладкие функции;

3. $M \cap U$ является взаимно однозначным образом при гладком отображении максимального ранга $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$, где $V \subset \mathbb{R}^m$ — некоторая область. Такое отображение φ вместе с областями $V \subset \mathbb{R}^m$ и $U \cap M \subset M$ называется *картой*, а произвольная совокупность карт, покрывающих M — *атласом*;

4. существует (криволинейная) система координат в U, в которой $M \cap U$ есть координатная m-мерная плоскость $x_{m+1} = \cdots = x_n = 0$;

5. $M \cap U$ задается системой уравнений $\{f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$, такой, что ранг матрицы частных производных $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$ равен ровно $n - m$ в каждой точке $\mathbf{x} \in U$ (количество уравнений, вообще говоря, может даже быть бесконечным).

Задачи.

1. Докажите эквивалентность определений $1 - 5$.

   В последующих задачах определите, при каких условиях данные множества являются многообразиями, найдите размерность, определите карты и локальные координаты.

2. Окружность $x^2 + y^2 = R^2$; сфера $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$.

3. Поверхность $x^2 + y^2 - z^2 = a$.

4. Множество $\left\{ \begin{array}{l} 3x + y - z + u^2 = a \\ x + y + 2z + u = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u = 0 \end{array} \right.$.

5. Образ отрезка $[a, b]$ при отображении $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$.

6. Подмножества $SL(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$, $SL(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{R}^{2n^2}$ квадратных матриц с вещественными и комплексными элементами соответственно, состоящее из матриц с единичным определителем.

7. Подмножество $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n^2}$ матриц с нулевым определителем; подмножество $\Sigma \setminus \{0\}$.

8. Множества $O(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$, $U(n) \subset \mathbb{R}^{2n^2}$ ортогональных и унитарных матриц соответственно ($AA^* = E$). (Указание: посчитать ранг дифференциала отображения $f : A \mapsto AA^*$, для начала — в точке E).

9. Многообразие Штифеля $S_{n,k}$ состоящее из ортонормированных k-реперов в $\mathbb{R}^n$.

10. Множество $M_r \subset \mathbb{R}^{mn}$ матриц размера $m \times n$ ранга r.

11. Множество в $\mathbb{R}^{2n}$, заданное уравнениями $\left\{ \begin{array}{l} z_1^2 + \cdots + z_n^2 = a \\ |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1 \end{array} \right.$.