Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 10 ноября 1999 года

Лемма Пуанкаре. Всякая замкнутая k-форма в шаре $B \subset \mathbb{R}^n$ при $k > 0$ является точной.

Доказательство. Построим отображение $H : \Omega^{k+1}(B) \to \Omega^k(B)$, чтобы выполнялось тождество $\omega = dH\omega + Hd\omega$ для любой k-формы ω (такое отображение называется отображением *гомотопии*). Потом заметим, что если ω — замкнута, то $\omega = d(H\omega)$, то есть ω точна.

Перейдём к построению отображения H. Через CV обозначим конус над подмногообразием с краем $V^k \subset B$. Тогда $\partial(CV) = V \cup (C\partial V)$.

1. Определите, как связаны ориентации многообразий с краем $\partial(CV), V, C\partial V$, если они индуцируются ориентацией многообразия с краем CV.

Для любой k-формы ω имеем: $\int_V \omega = \int_{\partial CV} \omega + \int_{C\partial V}$. Пусть теперь $\Omega = H\omega$ — такая $(k-1)$-форма, что для любого V^k $\int_V \Omega = \int_{CV} \omega$. Произведём необходимую проверку:
$\int_V (dH\omega + Hd\omega) = \int_{\partial V} H\omega + \int_V Hd\omega = \int_{C\partial V} \omega + \int_{CV} d\omega = \int_{C\partial V} \omega + \int_{\partial CV} \omega = \int_V \omega$.

Для формы Ω верна следующая формула:

$$\Omega_{\mathbf{x}}(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) = \int_P \Omega = \int_{CP} \omega = \int_0^1 \omega_{t\mathbf{x}}(e, t\xi_1, \ldots, t\xi_{k-1})dt,$$

где P — параллелепипед, натянутый на вектора $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$, $e = \sum x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

2. Пусть $n = 3$. Найдите $H\omega$ для следующих форм:
   (a) $\omega = A(x,y,z)\, dy \wedge dz + B(x,y,z)\, dz \wedge dx + C(x,y,z)\, dx \wedge dy$;
   (b) $\omega = a(x,y,z)\, dx \wedge dy \wedge dz$.

3. Покажите, что если $\omega = a(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ $(N \geq n)$, то

$$H\omega = c(x_1, \ldots, x_N) \sum (-1)^k x_k\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

   Чему равно $c(x_1, \ldots, x_N)$?

Ещё один пример гомотопии. Пусть $M \xrightarrow{f_t} N$, $0 \leq t \leq 1$ — гомотопия. Обозначим через $v_{t,\mathbf{x}} \in T_{f_t(\mathbf{x})}N$ касательный вектор к кривой $t \mapsto f_t(\mathbf{x})$. Положим $h_t\omega(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) = \omega(v_t, f_*\xi_1, \ldots, f_*\xi_{k-1})$ $(\omega \in \Omega^k(N),\ h\omega \in \Omega^{k-1}(M))$.

Лемма. (Обобщение формулы Картана) $h_t d\omega + dh_t\omega = \dfrac{d\Omega_t}{dt}$, где $\Omega_t = f_t^*\omega$.

Использование этой формулы. Рассмотрим семейство отображений $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto t\mathbf{x}$. Тогда $f_0^*\omega = 0$, $f_1^*\omega = \omega$. По лемме $\omega = \int_0^1 \dfrac{d\Omega_t}{dt}dt = \displaystyle\int_0^1 (h_t d\omega + dh_t\omega)dt = Hd\omega + dH\omega$. Поэтому можно взять $H\omega = \int_0^1 h_t\omega dt$.

4. Вычислите $Hd + dH$ на

   (a) 0-формах (функциях);

   (b) точных 1-формах в $\mathbb{R}^n$;

   (c) произвольных 1-формах в $\mathbb{R}^3$;

5. Определите $H\omega$ для $\frac{1}{\mathbf{r}^3}(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy)$.

6. Найдите линейные преобразования в $\mathbb{R}^3$, сохраняющие форму $dx_1 \wedge dx_2$.

7. Опишите замкнутые и точные формы

   (a) на окружности;

   (b) в комплексе $e^{-x^2/2}(P,\ Q\,dx)$, где $P(x), Q(x)$ — многочлены;

   (c) в комплексе $e^{-x^3-x}(P,\ Q\,dx)$, где $P(x), Q(x)$ — многочлены;

   (d) в комплексе $e^{-(x^2+y^2)}(P,\ U\,dx+V\,dy\ , Q\,dx\wedge dy)$, где $P(x,y), \ldots, Q(x,y)$ — многочлены.