Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 17 ноября 1999 года

В классическом векторном анализе в трехмерном пространстве функция $f(x, y, z)$ может обозначать как собственно функцию, так и 3-форму $f\,dx \wedge dy \wedge dz$. Аналогично, вектор-столбец $(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ может обозначать не только векторное поле $P\dfrac{\partial}{\partial x} + Q\dfrac{\partial}{\partial y} + R\dfrac{\partial}{\partial z}$, но и 1-форму $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, или 2-форму $P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$. В этих обозначениях дифференциалы в комплексе

$$\Omega^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^3(\mathbb{R}^3)$$

называются, соответственно, *градиентом, ротором и дивергенцией.*

В координатах эти операции выражаются так:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right), \\ \operatorname{rot}(P, Q, R) &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right), . \\ \operatorname{div}(P, Q, R) &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

Замечание. rot grad = div rot = 0.

Пусть n — поле единичных нормалей к двумерной поверхности M. 2-форма $dS = i_n dV = n_x\,dy \wedge dz + n_y\,dz \wedge dx + n_z\,dx \wedge dy$ на ней называется *формой площади*. Интеграл $\int_M (A, n)\,dS = \int_M P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$ для поля $A = (P, Q, R)$ называется *потоком поля A через поверхность M.*

$$\int_{\partial D} (A, n)\,dS = \int_D \operatorname{div} A\,dV$$

— формула *Гаусса-Остроградского* для потока поля A через границу области ∂D.

Если γ — замкнутая кривая, то интеграл $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ для поля $A = (P, Q, R)$ называется *циркуляцией поля A по контуру γ.*
Формула Стокса: если D — поверхность, у которой граница ∂D является замкнутой кривой, то $\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_D (\operatorname{rot} A, n) dS$.

Опишем инвариантно (насколько это возможно) соответствия между функциями, полями и формами, т.е. выясним, от каких дополнительных структур они зависят. Примерами возможных структур являются *форма объёма* — невырожденная дифференциальная форма dV старшей степени (например, $dV = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ в $\mathbb{R}^n$).

1. Покажите, что существование формы объёма на многообразии равносильно его ориентируемости (в предположении, что многообразие компактно).

Пусть на многообразии M^n задана форма объема $dV = \omega^n$. Она задает взаимно-однозначное соответствие между векторными полями и $(n-1)$-формами, $v \mapsto \omega_v^{n-1} = \omega(v, \cdot)$. При этом n-форма $d\omega_v = L_v \omega$ пропорциональна ω, коэффициент пропорциональности называется *дивиргенцией* векторного поля v. Из определения вытекает, что

$$\operatorname{div} v(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{D_\varepsilon} L_v \omega}{Vol(D_\varepsilon)} .$$

Метрика — гладко зависящее от точки многообразия скалярное произведение в касательных пространствах (например, $\|v\|^2 = \sum v_i^2$ в $\mathbb{R}^n$). С помощью метрики задаётся изоморфизм $T_{\mathbf{x}}M \equiv T^*_{\mathbf{x}}M$ $(v \mapsto \alpha_v^1 = (v, \cdot))$, и обратно: выбор такого изоморфизма означает выбор метрики. Если $F : M \to \mathbb{R}$ — некоторая функция, то поле, соответствующее её дифференциалу dF, является $\mathrm{grad} F$. Векторное поле, которое является градиентом некоторой функции, называется *потенциальным.*

Уравнения Максвелла. Электромагнитное поле в $\mathbb{R}^3$ задается двумя полями $E = (E_1, E_2, E_3)$ и $H = (H_1, H_2, H_3)$. Уравнения распространения электромагнитных волн в вакууме имеют вид (инвариантный относительно преобразований Лоренца)

$$\begin{array}{cc} \operatorname{div} H = 0, & \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\dot{H} \\ \operatorname{div} E = 0, & \operatorname{rot} H = \frac{1}{c}\dot{E} \end{array} .$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$dF = 0, \qquad d(*F) = 0,$$

где

$$\begin{array}{c} F = -E_1 dx_0 \wedge dx_1 - E_2 dx_0 \wedge dx_2 - E_3 dx_0 \wedge dx_3 + H_1 dx_2 \wedge dx_3 + H_2 dx_3 \wedge dx_1 + H_3 dx_1 \wedge dx_2, \\ *F = H_1 dx_0 \wedge dx_1 + H_2 dx_0 \wedge dx_2 + H_3 dx_0 \wedge dx_3 + E_1 dx_2 \wedge dx_3 + E_2 dx_3 \wedge dx_1 + E_3 dx_1 \wedge dx_2. \end{array} ,$$

где $x_0 = ct$, а x_1, x_2, x_3 — координаты точки в $\mathbb{R}^3$. Связь между формами F и $*F$ состоит в следующем. Наличие невырожденного скалярного произведения в касательном пространстве к многообразию M задает скалярное произведение и во всех его внешних степенях, что вместе со спариванием $\Omega^k(M) \times \Omega^{n-k}(M) \to \Omega^n(M)$, задаваемым внешним умножением, дает отождествления $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$. При $n = 4$ если $k = 2$, то и $n - k = 2$. Оказывается, что оператор $*$, участвующий в уравнениях Максвелла, соответствует $(1,3)$-метрике Минковского $dl^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$ в четырёхмерном пространстве-времени, которая невырождена.

2. Рассмотрим тело $\left\{ \begin{array}{l} z \geq x^2 + y^2 \\ z \leq 1 \end{array} \right.$. Найдите для этого тела:

   (a) обьём;

   (b) площадь поверхности;

   (c) центр масс;

   (d) моменты относительно осей;

   (e) силу притяжения в точке $(0, 0, 0)$.

3. Тело вращения получается вращением вокруг оси z кривой, расположенной в плоскости xOz и непересекающей прямую Oz. Выразите объём этого тела через известные интегралы для кривой.

4. Запишите dS для поверхности вращения, если кривая в плоскости xOz задана

   (a) параметрически;

   (b) неявно, $f(x, y) = 0$.

5. Пусть $P : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to S^2$ — проекция из начала координат. Покажите, что форма

$$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\mathbf{r}^3}(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy)$$

   есть $P^*(dS)$.

   Следствие. Если $D \subset \mathbb{R}^3$ — некоторая поверхность, то интеграл

$$\frac{1}{4\pi}\int_D \frac{1}{\mathbf{r}^3}(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy)$$

   является целым числом.

6. Пусть $P : T^2 \to S^2$ — отображение, задаваемое формулой $P(t, \tau) = \frac{a(t)-b(\tau)}{|a(t)-b(\tau)|}$. Покажите, что тогда форма

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\langle a - b, \dot{a}, \dot{b}\rangle\, d\tau \wedge dt}{|a - b|^{\frac{3}{2}}}$$

   есть $P^*(dS)$.

   Следствие. Если $a(t), b(\tau)$ — некоторые кривые, то интеграл

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{\langle a - b, \dot{a}, \dot{b}\rangle\, d\tau \wedge dt}{|a - b|^{\frac{3}{2}}}$$

   является целым числом, которое называется *коэффициентом зацепления* данных кривых.