Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 22 сентября 1999 года

Определения.

1. *Касательное пространство* к гладкому подмногообразию $M^n \subset \mathbb{R}^N$, локально заданному уравнениями $f_i(\mathbf{x}) = 0$, $1 \le i \le N-n$, в точке $\mathbf{y} \in M$ определяется равенством $T_{\mathbf{y}}M = \{\xi \in T_{\mathbf{y}}\mathbb{R}^N | \ \ df_1|_{\mathbf{y}}(\xi) = 0, \ldots, df_{N-n}|_{\mathbf{y}}(\xi) = 0\}$.

2. *Касательный вектор* к многообразию M в точке $\mathbf{x} \in M$ задается, как и для областей евклидова пространства, как класс эквивалентных кривых, выходящих из точки $\mathbf{x}$. Множество касательных векторов образует *касательное пространство* $T_{\mathbf{x}}M$.

Определение. *(Гладким) векторным полем* v на многообразии M называется (гладко) зависящее от точки семейство касательных векторов $v(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}M$, $\mathbf{x} \in M$.

Интегральной (фазовой) кривой векторного поля $v(\mathbf{x})$ называется кривая $\varphi : \mathbb{R} \to M$, если $\forall t \in \mathbb{R}$ $\dot\varphi(t) = v(\varphi(t))$. *Фазовый поток* g^t *векторного поля* v — это семейство диффеоморфизмов $g^t : M \to M$ таких, что $\forall \mathbf{x} \in M$ $\varphi(t) = g^t(\mathbf{x})$ является фазовой кривой поля v.

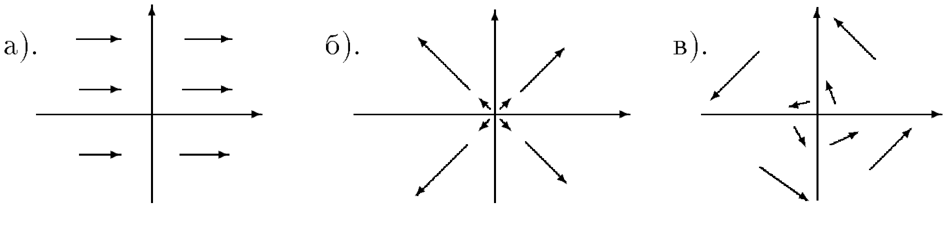
Основная теорема теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть v_i, $1 \le i \le n$ — гладкие функции в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда существует и единственно решение системы ОДУ $\begin{cases} \dot\varphi_1(t) = v_1(\varphi(t)) \\ \vdots \\ \dot\varphi_n(t) = v_n(\varphi(t)) \end{cases}$ с данным начальным условием $\varphi(0) = \mathbf{x}_0$, заданное при малых t и гладко зависящее от $\mathbf{x}_0$.

Теорема. Пусть v — гладкое векторное поле на компактном многообразии M. Тогда существует семейство диффеоморфизмов $g^t : M \to M$, заданных при всех $t \in \mathbb{R}$ таких, что при любом фиксированном начальном условии $\mathbf{x}_0$ $g^t(\mathbf{x}_0)$ является решением (фазовой кривой).

Задачи.

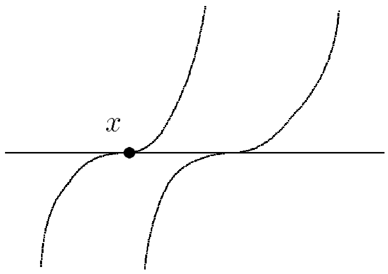
1. Найдите выражения для векторных полей $\dfrac{\partial}{\partial y_0}$, $\dfrac{\partial}{\partial y_1}$ в разных картах многообразия $\mathbb{R}P^2$.

2. Для приведённых на рисунках векторных полей найти их запись в координатах, решения соответствующих систем ОДУ, фазовые потоки за время t.



3. Построить векторное поле на $\mathbb{R}$, у которого ни при каком $t > 0$ не существует фазового преобразования g^t.

4. Рассмотрим векторное поле, вектора которого касаются всюду изображённого семейства кривых и имеют горизонтальную составляющую фиксированной длины 1. Сколько фазовых кривых выходит из точки x? Противоречит ли этот пример основной теореме ОДУ?



Теорема. (о выпрямлении векторного поля) Для любого гладкого векторного поля v, заданного в некоторой окрестности 0 и такого, что $v(0) \neq 0$, найдётся система координат, в которой $v = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$.

5. Доказать эту теорему. Указание: рассмотреть гиперплоскость $\{x_1 = 0\}$, трансверсальную полю и карту $\varphi(g^{x_1}_{\widetilde{\mathbf{x}}}) = (x_1, \ldots, x_n)$, где $\widetilde{\mathbf{x}} = (x_2, \ldots, x_n)$ — координаты на гиперплоскости. Записать v в этой карте.

6. Выпрямить в окрестности любой точки $\mathbf{x} \neq 0$ следующие векторные поля. Существует ли система координат, в которой выпрямляются оба поля?

$$\begin{aligned} u &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} \\ v &= y\frac{\partial}{\partial x} - x^2\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

7. Те же вопросы для полей

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \\ v &= y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} .$$

8. Докажите основную теорему ОДУ. Указание: рассмотреть отображение пространства функций в себя: $A\psi(t) = \int_0^t v(\psi(\tau))d\tau$ и переписать уравнение в виде $\varphi = A\varphi$. Далее надо правильно определить метрическое (полное) пространство функций и воспользоваться принципом сжимающих отображений.