Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 29 сентября 1999 года

1. Выпрямить следующие пары векторных полей:

(a) $\begin{array}{l} v_1 = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{y}{1+x}\dfrac{\partial}{\partial y} \\ v_2 = (1+x)\dfrac{\partial}{\partial y} \end{array}$ (b) $\begin{array}{l} v_1 = (1+x)\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} \\ v_2 = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + (1+x)\dfrac{\partial}{\partial y} \end{array}$ (c) $\begin{array}{l} v_1 = \dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y} \\ v_2 = y\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y} \end{array}$.

2. Покажите, что при замене координат $\begin{cases} x = x(t,s) \\ y = y(t,s) \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial x}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} = \dfrac{\partial x}{\partial s}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial s}\dfrac{\partial}{\partial y} \end{array}.$$

3. Докажите следующий критерий: поля v_1, v_2 выпрямляются в паре тогда и только тогда, когда $\forall s,t \in \mathbb{R}\ g^s_{v_2} g^t_{v_1} = g^t_{v_1} g^s_{v_2}$.

Пусть $v \in T_{\mathbf{x}}M$ — касательный вектор. Рассмотрим кривую $\varphi(t)$, у которой $\varphi(0) = \mathbf{x}$, $\dot{\varphi}(0) = v$.

Определение-напоминание. *Производной* $\dfrac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x})$ *функции* $f : M \to \mathbb{R}$ *вдоль вектора* v называется число $\left.\dfrac{d(f\circ\varphi)}{dt}\right|_{t=0}$.

Определение. *Производной функции* $f : M \to \mathbb{R}$ *вдоль векторного поля* $v(\mathbf{x})$ называется функция $\dfrac{\partial f}{\partial v(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$. Обозначения: vf, $L_v f$.

Замечание. $vf(\mathbf{x}) = \left.\dfrac{df(g^t_v(\mathbf{x}))}{dt}\right|_{t=0}$.

4. Пусть в координатах $v(\mathbf{x}) = v_1(\mathbf{x})\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_n(\mathbf{x})\dfrac{\partial}{\partial x_n}$. Найдите $vf(\mathbf{x})$.

5. Покажите, что взятие производной вдоль векторного поля является дифференцированием, то есть удовлетворяет следующим условиям:

   (a) линейность;

   (b) (тождество Лейбница) $v(fg) = f \cdot vg + vf \cdot g$.

6. Докажите, что любое дифференцирование есть L_v для некоторого $v(\mathbf{x})$.

7. Является ли дифференцированием $L_u \circ L_v$?

8. Покажите, что $L_u L_v - L_v L_u$ является дифференцированием.

Определение. *Коммутатор* $[u, v]$ векторных полей u, v определяется равенством $L_{[u,v]} = L_u L_v - L_v L_u$.

9. Найдите координатное выражение для коммутатора полей $u = \sum u_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ и $v = \sum v_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. (Ответ: $[u, v] = \sum \left(u_j \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} - v_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.)
10. Найдите коммутаторы пар полей из задачи 1.
11. Докажите, что операция коммутирования векторных полей билинейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ (говорят, что векторные поля образуют алгебру Ли).
12. Найдите $[fu, v]$, $[u, gv]$.
13. Докажите, что если $v(0)$, $u(0)$ линейно независимы и $[u, v](\mathbf{x}) \equiv 0$, то найдётся система координат (t, s), в которой $u = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $v = \dfrac{\partial}{\partial s}$.
14. Покажите, что $g_v^{-t} g_u^{-t} g_v^t g_u^t(\mathbf{x}) = g_{[u,v]}^{t^2}(\mathbf{x}) + o(t^2) = \mathbf{x} + t^2[u, v] + o(t^2)$.

Определение. Если $f : M \to N$ — гладкое отображение, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, то индуцированное отображение $f_* : T_{\mathbf{x}} M \to T_{\mathbf{y}} N$ называется *дифференциалом отображения* f.

15. Пусть даны два векторных поля $v(\mathbf{x})$, $u(\mathbf{x})$. Рассмотрим семейство векторных полей $v_t(\mathbf{x}) = {g_u^{-t}}_* v(g^t(\mathbf{x}))$. Докажите, что $\left.\dfrac{dv_t}{dt}\right|_{t=0} = [u, v]$.

Определение. *Производными рыбака векторного поля* $v(\mathbf{x})$ *и функции* $f(\mathbf{x})$ *вдоль векторного поля* $u(\mathbf{x})$ называются $L_u v = [u, v]$ и $L_u f = uf$ соответственно.

16. (Тождество T4) Покажите, что для любых пяти векторных полей $v_1, \ldots, v_5$ на прямой выполняется следующее равенство:

$$\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} [v_{\sigma(1)}, [v_{\sigma(2)}, [v_{\sigma(3)}, [v_{\sigma(4)}, v_5]]]] = 0.$$