Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 6 октября 1999 года

Определение. *Кокасательным вектором* называется элемент сопряженного пространства $T^*_{\mathbf{x}}M$, то есть линейная форма на пространстве касательных векторов в данной точке. *Дифференциальной 1-формой* называется семейство кокасательных векторов, гладко зависящих от точки многообразия.

Определение. Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ — некоторая гладкая функция. *Дифференциалом df* называется 1-форма, значение которой на векторе v равно производной vf вдоль этого вектора.

1. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторые координаты на M. Тогда ковектора $dx_1, \ldots, dx_n$ составляют базис в $T^*_{\mathbf{x}}M$, двойственный базису $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ пространства $T_{\mathbf{x}}M$.
2. Покажите, что $df = \sum \dfrac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.
3. Самолёт вылетел из Москвы, полетел сначала на s км на Восток, потом s км на Север, потом s км на Запад, и, наконец, s км на Юг. На сколько он отклонился от точки вылета в результате такого полёта? (Указание: поверхность Земли следует считать сферой.)
4. В сферических координатах (φ, ψ) на единичной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ найдите:
   (a) векторные поля $u = u(\varphi, \psi)\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$, $v = v(\varphi, \psi)\dfrac{\partial}{\partial \psi}$, $(u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}S^2 \subset T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^3)$, имеющие постоянную длину 1 в стандартной метрике $\mathbb{R}^3$;
   (b) $[u, v]$;
   (c) dx, dy, dz;
   (d) $x\,dx + y\,dy + z\,dz$.
5. Те же вопросы для тора.

Определение. *Обратным образом при отображении $f : M \to N$ 1-формы* ω, определённой на N называется 1-форма, определённая на M по следующему правилу: $f^*\omega|_{\mathbf{x}}(v) = \omega|_{f(\mathbf{x})}(f_*v)$.

Определение. *Внешней 2-формой* называется билинейная кососимметрическая 2-форма на касательном пространстве $T_{\mathbf{x}}M$. Эти формы составляют *внешний квадрат $\Lambda^2 T^*_{\mathbf{x}}M$ пространства $T^*_{\mathbf{x}}M$*. *Дифференциальной 2-формой* называется семейство внешних 2-форм, гладко зависящих от точки многообразия.

Замечание. $\dim \Lambda^2 T^*_{\mathbf{x}}M = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Определение. *Внешним произведением* 1-форм $\alpha \wedge \beta$ называется 2-форма, определяемая следующим соотношением: $\alpha \wedge \beta(u, v) = \alpha(u)\,\beta(v) - \alpha(v)\,\beta(u)$.

6. Докажите, что базис в $\Lambda^2 T^*_{\mathbf{x}} M$ образован формами ω_{ij}, $1 \le i < j \le n$, такими, что $\omega_{ij}(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}) = \begin{cases} 1, & \text{если } (i,j) = (k,l) \\ -1, & \text{если } (i,j) = (l,k) \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$.

7. Найдите $dx_i \wedge dx_j$.

8. Покажите, что любая дифференциальная 2-форма представляется в виде $w = \sum\limits_{i<j} w_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$.

9. Найдите для сферы и тора форму ориентированной площади, такую, чтобы она совпадала с формой площади в $\mathbb{R}^3$.

10. Найдите на сфере и торе:

    (a) $dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$;

    (b) $z\, dx \wedge dy + x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx$.

11. Существует ли 2-форма на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, нигде не обращающаяся в нуль?

Определение. *Дифференциалом* $d\omega$ *1-формы* ω называется 2-форма, определяемая следующим соотношением: $d\omega(u,v) = u\omega(v) - v\omega(u) - \omega([u,v])$.

12. Проверьте, что $d\omega$ действительно является 2-формой (проверить билинейность над $C^\infty(M)$).

13. Найдите коэффициенты ω_{ij} в равенстве

$$d(\sum \omega_i\, dx_i) = \sum_{i<j} \omega_{ij}\, dx_i \wedge dx_j.$$