Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 13 октября 1999 года

Определение. Пусть V — векторное пространство. *Внешней k-формой* называется полилинейная кососимметрическая форма от k векторов пространства V. Пространство внешних k-форм обозначается через $\Lambda^k(V^*)$.

Замечание. Если $\dim V = n$, то $\dim \Lambda^k(V^*) = C_n^k$.

Определение. *Дифференциальной k-формой ω на многообразии M* называется семейство внешних k-форм $\omega_{\mathbf{x}} \in \Lambda^k(T^*_{\mathbf{x}}M)$, гладко зависящих от точки $\mathbf{x} \in M$. Пространство дифференциальных k-форм на многообразии M обозначается через $\Omega^k(M)$. По определению, $\Omega^0(M)$ — пространство гладких функций.

Определение. *Внешним умножением $\alpha^k \wedge \beta^l$* k-формы α^k и l-формы β^l называется $k+l$-форма

$$\alpha^k \wedge \beta^l(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \sum_{\sigma_1 < \dots < \sigma_k;\ \sigma_{k+1} < \dots < \sigma_{k+l}} (-1)^\sigma \alpha^k(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_k})\, \beta^l(\xi_{\sigma_{k+1}}, \dots, \xi_{\sigma_{k+l}}) \,,$$

где $(-1)^\sigma$ — знак подстановки $(1, \dots, k+l) \mapsto (\sigma_1, \dots, \sigma_{k+l})$.

1. Докажите, что $\alpha \wedge \beta$ является $(k+l)$-формой.
2. Проверьте, что операция $\alpha \wedge \beta$
   (a) билинейна по α и β;
   (b) ассоциативна;
   (c) суперкоммутативна: $\alpha^k \wedge \beta^l = (-1)^{kl} \beta^l \wedge \alpha^k$.
3. Для данных 1-форм $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ и векторов $v_1, \dots, v_k$ вычислите $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k(v_1, \dots, v_k)$.
4. Докажите, что каждая дифференциальная k-форма в локальных координатах однозначно представляется в виде
   $$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$
   где $a_{i_1, \dots, i_k}(x)$ — гладкие функции. Найдите выражение для внешнего произведения форм в этих координатах.

Определение. *Дифференциал $d\omega$* дифференциальной k-формы ω — это дифференциальная $(k+1)$-форма, значение которой на наборе векторных полей $v_0, \dots, v_k$, определяется формулой

$$d\omega(v_0, \dots, v_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i v_i \omega(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k) + \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \omega([v_i, v_j], v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k) \,.$$

5. Докажите следующие свойства дифференциала:

   (a) линейность;

   (b) если $f \in \Omega^0$, то df совпадает с обычным дифференциалом функций.

   (c) $dd = 0$.

   (d) $d(\alpha^k \wedge \beta^l) = (d\alpha^k) \wedge \beta^l + (-1)^k \alpha^k \wedge (d\beta^l)$.

6. Вычислите по определению $d^2 f$ и $d^2\omega$, где f — функция и ω — 1-форма.

7. Докажите, что в координатах выражение для дифференциала следующее:

$$d(\sum_{i_1,\dots,i_k} a_{i_1,\dots,i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = \sum_{i_1,\dots,i_k} da_{i_1,\dots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} =$$

$$= \sum_{l;i_1,\dots,i_k} \frac{\partial a_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x_l} dx_l \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} .$$

Пусть задано гладкое отображение $F : M^m \to N^n$, $F_* : T_{\mathbf{x}}M \to T_{F(\mathbf{x})}N$ — касательное отображение. Однако на векторных полях отображение F_* не определено, поскольку F, вообще говоря, не взаимно однозначно. Тем не менее на формах операция взятия *обратного образа*, $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$, действующая по правилу $F^*\omega(v_1, \dots, v_k) = \omega(F_*v_1, \dots, F_*v_k)$ корректно определена.

8. Докажите, что взятие обратного образа перестановочно с внешним умножением:
$$F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta.$$

9. Докажите, что взятие дифференциала перестановочно с взятием обратного образа при отображениях, то есть если $F : M^m \to N^n$ — гладкое отображение многообразий, и $\omega \in \Omega^k(N)$, то $dF^*\omega = F^*d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$.

10. Покажите, что $\omega^1 \wedge \omega^1 = 0$. Верно ли, что $\omega^2 \wedge \omega^2 = 0$? Приведите пример ω^2, для которой $\omega^2 \wedge \omega^2 \neq 0$.

11. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — линейно независимые 1-формы, и $\alpha \neq 0$ — еще одна 1-форма. Докажите, что $\alpha \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k = 0$ тогда и только тогда, когда α есть линейная комбинация форм α_i.

Определение. Пусть для каждой точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ задана плоскость $C_{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^3$. Семейство таких плоскостей называется *распределением.* Распределение является *интегрируемым* в некоторой окрестности U, если найдется функция h на U такая, что $\forall \mathbf{x} \in U \quad dh(\mathbf{x}) \neq 0$ и плоскость $C_{\mathbf{x}}$ касается поверхности уровня функции h, проходящей через точку $\mathbf{x}$.

Пример. Распределение $C_{\mathbf{x}} = \langle \frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \rangle$ неинтегрируемо.

Замечание. Распределение может быть задано и с помощью 1-формы ω: $C_{\mathbf{x}} = \ker \omega_{\mathbf{x}}$, причем форма ω определяется с точностью до умножения на ненулевую функцию. Распределение интегрируемо тогда и только тогда, когда $\omega = g\,dh$.

Теорема (критерий интегрируемости Фробениуса). Распределение интегрируемо тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих равносильных условий:

(i) $\omega \wedge d\omega = 0$;

(ii) если X, Y — векторные поля, которые в любой точке $\mathbf{x}$ образуют базис плоскости $C_{\mathbf{x}}$, то $[X, Y]$ является линейной комбинацией X и Y.

12. Найдите $\omega \wedge d\omega$, если $\omega = dz - y\,dx$.

13. Пусть

    (a) $\omega = (1 + yz)\,dx - xy\,dz - xz\,dy$;

    (b) $\omega = \cos x \cos y \cos z\,dx + \sin x \cos y \sin z\,dz + \sin x \sin y \cos z\,dy$.

    Найдите

    (a) $\omega \wedge d\omega$;

    (b) $[X, Y]$, где X, Y — линейно независимые векторные поля, для которых $\omega(X) = \omega(Y) = 0$;

    (c) функцию h такую, что $\omega = g\,dh$.

14. Докажите равносильность условий (i) и (ii) теоремы.

15. Докажите теорему Фробениуса.