Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 20 октября 1999 года

1. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — линейно независимые 1-формы, и $\beta \neq 0$ — еще одна 1-форма. Докажите, что следующие условия равносильны:

   (a) $\beta \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = 0$;

   (b) β есть линейная комбинация форм α_i.

   (c) существует некоторая $(k-1)$-форма γ, для которой $\beta \wedge \gamma = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$.

2. Пусть $\beta \neq 0$ — некоторая 1-форма, а ω — некоторая k-форма. Докажите, что $\beta \wedge \omega = 0$ тогда и только тогда, когда $\omega = \beta \wedge \gamma$ для некоторой формы γ.

Пусть V — некоторое n-мерное векторное пространство (например, $V = T^*_{\mathbf{x}}M$). Рассмотрим его внешние степени: V, $\Lambda^2 V$, ..., $\Lambda^n V$. Возьмем некотрый элемент $\beta \in V$, $\beta \neq 0$. Тогда операция внешнего домножения слева на β порождает цепочку отображений

$$0 \xrightarrow{\beta\wedge} V \xrightarrow{\beta\wedge} \Lambda V \xrightarrow{\beta\wedge} \ldots \xrightarrow{\beta\wedge} \Lambda^n V \xrightarrow{\beta\wedge} 0,$$

причем $\beta \wedge \circ \beta \wedge (\Lambda^i V) = 0$. Таким образом, задача 2 утверждает, что $\beta \wedge (\Lambda^{i-1} V) = \ker \beta \wedge |_{\Lambda^i V}$.

Теперь рассмотрим все дифференциальные формы на n-мерном многообразии M. Операция взятия дифференциала d дает отображения $\Omega^i(M) \xrightarrow{d} \Omega^{i+1}(M)$. Эти отображения также выстраиваются в цепочку

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \ldots \Omega^n(M) \xrightarrow{d} 0$$

со свойством $d^2 = 0$. Форма ω, для которой $d\omega = 0$, называется *замкнутой*. Форма ω, для которой найдется форма η такая, что $\omega = d\eta$, называется *точной*. Обозначим через $Z^k(M)$ и $B^k(M)$ пространства точных и замкнутых k-форм соответственно. Ясно, что $Z^k \subset B^k$.

Определение. Фактор-пространство $H^k_{dR}(M) = Z^k(M)/B^k(M)$ называется *пространством k-ых когомологий де-Рама.*

3. Найдите когомологии окружности и прямой.

4. Опишите все

   (a) формы;

   (b) замкнутые формы;

   (c) точные формы

   на S^1, $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, S^2, T^2.

Мы уже определяли *производные рыбака* от функций ($L_u f = uf$) и векторных полей ($L_u v = [u, v]$). Определим теперь $L_u\omega$, где ω — некоторая k-форма.

Определение. $L_u\omega = \frac{d}{dt}|_{t=0}\omega_t$, где $\omega_t(\mathbf{x}) = {g_u^t}^*\omega(g^t\mathbf{x})$.

Следствие. Пусть $v_1, \dots, v_k$ — векторные поля. Положим $v_{it}(\mathbf{x}) = g_*^{-t}v_i(g^t\mathbf{x})$. Тогда $\omega_t(v_{1t}, \dots, v_{kt}) = \omega(v_1, \dots, v_k)$. Откуда $u(\omega(v_1, \dots, v_k)) = L_u\omega(v_1, \dots, v_k) + \sum_{i=1}^{k}\omega(v_1, \dots, [u, v_i], \dots, v_k)$. Таким образом, $L_u\omega$ — это форма такая, что

$$L_u\omega(v_1, \dots, v_k) = u(\omega(v_1, \dots, v_k)) - \sum_{i=1}^{k}\omega(v_1, \dots, [u, v_i], \dots, v_k).$$

5. Проверьте, что эта формула действительно определяет дифференциальную форму той же степени.

6. Докажите, что

   (a) $L_u(\alpha \wedge \beta) = (L_u\alpha) \wedge \beta - (L_u\beta) \wedge \alpha = (L_u\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_u\beta)$;

   (b) $L_u(f\omega) = L_u f \cdot \omega + f \cdot L_u\omega = uf \cdot \omega + f \cdot L_u\omega$.

7. Выведите из определения, что $L_u df = d(uf)$.

Определение. Если u — векторное поле, ω — k-форма, то $(k-1)$-форма $i_u\omega$ определяется следующим равенством: $i_u\omega(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(u, v_1, \dots, v_{k-1})$.

Формула Картана. $L = id + di$, то есть $L_u\omega = d(i_u\omega) + i_u(d\omega)$.

8. Докажите формулу Картана следующими способами:

   (a) Исходя из определения.

   (b) Сначала докажите для функций и 1-форм вида df, а потом воспользуйтесь индукцией.