Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 27 октября 1999 года

Наводящие соображения. Пусть P — бесконечно малый параллелепипед, натянутый на касательные вектора $\xi_1, \ldots, \xi_k \in T_{\mathbf{x}}M^k$, а ω — некоторая k-форма. Тогда $\int_P \omega = \omega(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Для подсчёта интеграла по большим областям будем разбивать их на малые параллелепипеды.

Пример. Если $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, то $\int_D dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \operatorname{Vol} D$.

Определение. n-форма ω в $\mathbb{R}^n$ называется *финитной*, если её носитель ограничен. Если носитель формы $\omega = f(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ лежит в кубе $I^n = \{0 \leq x_i \leq 1\}$, то по определению, её интеграл — это кратный интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \stackrel{def}{=} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x)\, dx_1 \ldots dx_n\ .$$

Для определения интеграла n-формы по произвольному n-мерному многообразию нужно предполагать, что а) носитель формы компактен, и б) мгообразие ориентировано.

Определение. Многообразие M *ориентировано* (на многообразии M задана *ориентация*), если на нём зафиксирован атлас, в котором якобианы всех функций перехода положительны.

Пусть $\omega_1 \in \Omega^n(M)$ и пусть носитель формы ω_1 целиком помещается в некоторой карте $F : U \to M$, $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда мы можем положить

$$\int_M \omega_1 \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}^n} F^*\omega_1\ ,$$

где форма $F^*\omega_1 \in \Omega^n(U)$ продолжена нулём вне $U \subset \mathbb{R}^n$. Этот интеграл не зависит от карты, так как координатные отображения сохраняют ориентацию (действительно, при заменах координат подынтегральное выражение в кратном интеграле умножается на **модуль** якобиана замены, так же как и форма $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, поэтому интеграл финитной формы определён инвариантно).

Значит, чтобы определить интеграл $\int_M \omega$ в общем случае, достаточно представить ω в виде $\omega = \sum \omega_i$, где носитель каждой формы ω_i содержится в какой-нибудь карте, а затем воспользоваться аддитивностью интеграла, положив $\int_M \omega = \int_M \sum \omega_i \stackrel{def}{=} \sum \int_M \omega_i$.

1. Покажите, что описанное выше разбиение $\omega = \sum \omega_i$ существует.

2. Найдите интегралы следующих 1-форм по кривым:

   (a) $\omega = x^2y^3\, dx + dy + z\, dz$ по кривой $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}$;

   (b) $\omega = y\, dx + z\, dy + x\, dz$ по кривой $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + z = a \end{cases}$;

(c) $\omega = (z^2 - x^2)dx + (x^2 - y^2)dy + (y^2 - z^2)dz$ по образу прямоугольника $a \leq u \leq b$, $0 \leq v \leq 2\pi$ при отображении $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \sin v \\ z = cv \end{cases}$.

3. Докажите, что если γ — некоторая гладкая несамопересекающаяся замкнутая кривая на плоскости, то $\displaystyle\int_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{2}$ есть ориентированная площадь области, ограниченной кривой γ.

4. Вычислите интеграл от формы $d\omega$ по области

   (a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$;

   (b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \\ x + z = a \end{cases}$;

   (c) $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \quad (a \leq u \leq b,\ 0 \leq v \leq 2\pi), \\ z = cv \end{cases}$

   где ω — 1-форма, описанная в задаче 2 в соответствующем пункте.

5. Найдите $\int_{S^2} x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$, где сфера $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ задаётся уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

6. Вычислите $\operatorname{Vol} B^n$, $\operatorname{Vol} S^{n-1}$, где $B^n \subset \mathbb{R}^n$ — единичный шар, а $S^{n-1} = \partial B^n$ — единичная сфера.

7. Вычислите интеграл по верхней половине ($z \geq 0$) эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ от формы

   (a) $x^3 dy \wedge dz$;

   (b) $yz\,dz \wedge dx$.