Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 3 ноября 1999 года

1. Вычислите интеграл по эллипсоиду $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ от форм
   (a) $dx\wedge dy$; (b) $z\,dx\wedge dy$; (c) $z^2dx\wedge dy$;
   (d) $\dfrac{dy\wedge dz}{x}+\dfrac{dz\wedge dx}{y}+\dfrac{dx\wedge dy}{z}$.

2. Вычислите интеграл по верхней половине ($z\geq 0$) того же эллипсоида от форм
   (a) $x^3dy\wedge dz$;
   (b) $yz\,dz\wedge dx$.

3. При каком α форма
$$\omega=\mathbf{r}^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}x_i\,dx_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\ldots\wedge dx_n$$
   замкнута? Найдите $\int_{S^{n-1}}\omega$, где S^{n-1} — сфера радиуса 2 с центром в точке $(1,0,\ldots,0)$.

Определение. *Многообразием (размерности n) с краем* называется топологическое пространство с покрытием $M=\bigcup U_\alpha$ открытыми подмножествами и отображениями $\varphi_\alpha:U_\alpha\to V_\alpha$, где V_α — область в $\mathbb{R}^n_+=\{x_n\geq 0\}$ (возможно, пересекающая гиперплоскость $\{x_n=0\}$), такими, что если $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$, то отображения $\varphi_{\alpha\beta}=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha^{-1}(U_{\alpha\beta})\to\varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ должны быть диффеоморфизмами областей пространства $\mathbb{R}^n_+$. *Краем* ∂M называется многообразие $\bigcup\varphi_\alpha^{-1}(\{x_n=0\})$.

Замечание. Многообразие с краем не является в общем случае многообразием, но любое многообразие является многообразием с краем.

Определение. *Ориентацией многообразия с краем M* называется ориентация многообразия $M\setminus\partial M$. Ориентация M задаёт *индуцированную* ориентацию на его краю по правилу **"Внешняя нормаль — в начало."** Формально: пусть $\mathbf{x}\in\partial M$, и $e_1,\ldots,e_n\in T_{\mathbf{x}}M$ — положительный репер в $T_{\mathbf{x}}M$, причем $e_2,\ldots,e_n\in T_{\mathbf{x}}\partial M$, а e_1 направлен «наружу», тогда $e_2,\ldots,e_n$ — положительный репер в $T_{\mathbf{x}}\partial M$.

Теорема. (формула Стокса) Пусть M — компактное n-мерное многообразие с краем ∂M, и ω — $(n-1)$-форма на M. Тогда
$$\int\limits_{\partial M}\omega=\int\limits_{M}d\omega\ .$$

Проверим теорему в квадрате I^2 (невзирая на то, что квадрат многообразием с краем не является). Пусть $\omega=f(x,y)dy$. Тогда $d\omega=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx\wedge dy$. По формуле Ньютона-Лейбница получаем
$$\int_{I^2}d\omega=\int_0^1\Big(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}dx\Big)dy=\int_0^1(f(1,y)-f(0,y))dy\ .$$

С другой стороны, форма ω нетривиальна только на сторонах $x = 0$ и $x = 1$ квадрата, поэтому (после учёта соответствующих ориентаций)

$$\int_{\partial I^2} \omega = \int_0^1 f(1, y)dy - \int_0^1 f(0, y)dy \ .$$

Те же вычисления проверяют формулу Стокса в произвольном кубе I^n, нужно только y заменить всюду на $y_2, \dots, y_n$, а dy — на $dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n$.

Следствия.

(a) Формула Стокса для $\mathbb{R}^n$: если носитель формы $\omega \in \Omega^{n-1}\mathbb{R}^n$ компактен, то $\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0$.

(b) Формула Стокса для $\mathbb{R}^n_+$: если носитель формы $\omega \in \Omega^{n-1}\mathbb{R}^n_+$ компактен, то $\int_{\mathbb{R}^n_+} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega$.

Определение. *Функция-шапочка* $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — это бесконечно гладкая функция, удовлетворяющая следующим требованиям: $\rho(\mathbf{x}) = 0$ при $|\mathbf{x}| \geq 1$, $\rho(\mathbf{x}) > 0$ при $|\mathbf{x}| < 1$.

Определение. *Разбиение единицы* — это конечный набор бесконечно гладких функций $f_i : M \to \mathbb{R}$ таких, что

(i) носитель каждой функции содержится в какой-нибудь карте,

(ii) $\sum f_i \equiv 1$.

4. На всяком компактном многообразии существует разбиение единицы.

Пусть $\{f_i\}$ — разбиение единицы. Рассмотрим представление $\omega = \sum f_i \omega$. Тогда носитель формы $\omega_i = f_i \omega$ содержится в образе куба I^n при некотором отображении $F_i : U \to M$, $I^n \subset U \subset \mathbb{R}^n$, задающем некоторые локальные координаты. Положим $\Omega_i = F_i^* \omega_i$. Тогда $F_i^* d\omega_i = d\Omega_i$.
Рассмотрим два случая: 1) $F_i(I^n) \cap \partial M = \emptyset$. В этом случае $\int_{\partial M} \omega_i = 0$, поскольку $\omega_i = 0$ на ∂M. С другой стороны, по формуле Стокса для куба

$$\int_M d\omega_i = \int_{I^n} d\Omega_i = \int_{\partial I^n} \Omega_i = 0 \ ,$$

поскольку $\omega_i = 0$ на образе $F_i(\partial I^n)$ границы куба.
2) $F_i(I^n) \cap \partial M$ совпадает с гранью $I^{n-1} = \{x_1 = 0\}$ куба. Тогда $\int_{\partial M} \omega_i = -\int_{I^{n-1}} \Omega_i$ (вспомним правило ориентации границы!) С другой стороны, Ω_i обращается в ноль на всех гранях, кроме I^{n-1}, и опять по формуле Стокса для куба, получаем

$$\int_M d\omega_i = \int_{I^n} d\Omega_i = \int_{\partial I^n} \Omega_i = -\int_{I^{n-1}} \Omega_i \ .$$

Теорема полностью доказана.

Ещё одно доказательство. Любая $(n-1)$-форма на n-мерном ориентируемом многообразии (с краем) M может быть представлена в виде $\omega = i_v \Omega^n$, где Ω^n — форма объёма, v — некотрое векторное поле. Тогда $\int_M d\omega = \int_M di_v\Omega = \int_M L_v\Omega = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(\int_M g_t^*\Omega - \int_M \Omega) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(\int_{g^t M} \Omega - \int_M \Omega) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\bigcup\limits_{0\leq\tau\leq t} g^\tau \partial M} \Omega = \int_{\partial M} i_v\Omega = \int_{\partial M} \omega$.