Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 5 декабря 1999 года

Экзамен.

1. Существует ли в $\mathbb{R}^3$ замкнутая гладкая выпуклая поверхность S такая, что
$$\int_S x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy = 0\ ?$$

2. Пусть φ — инверсия (с центром в 0) $\mathbb{R}^4$,
$$v_1 = \varphi_*(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial}{\partial x_2});\quad v_2 = \varphi_*(x_1\frac{\partial}{\partial x_4} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2});$$
$$\omega = (\varphi^{-1})^*(dx_1\wedge dx_2 + dx_3\wedge dx_4);\quad \Omega = (\varphi^{-1})^*(dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4).$$
Найдите $[v_1, v_2]$, $L_{v_2}\omega$ и $L_{v_1}\Omega$.

3. Вычислите интеграл:
$$\int\limits_{x^2+y^2+z^2+yz+x=1} \frac{2\,dx\wedge dz - dx\wedge dy}{4z+5y}\ .$$

4. Вычислите интеграл
$$\int_G \frac{dx\wedge dy\wedge dz}{x^2+y^2+z^2}\ ,$$
где область G ограничена поверхностью вращения вокруг оси Oz кривой, заданной уравнением
$$(x^2+z^2)^2 = z(3x^2 - z^2).$$

5. Даны функция f и поле A в окрестности начала координат на плоскости:
$$f = \frac{1+x^2}{1+y} - 1,\quad A = \frac{1+x^2}{1+y}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial y}\ .$$
Докажите, что найдутся координаты u, v, в которых функция и поле одновременно принимают вид
$$f = u \ \text{ и }\ A = \frac{\partial}{\partial v}\ .$$

6. Найдите когомологии пространства $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.