З А Д А Ч И
К КУРСУ “ГЕОМЕТРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ”, ЧАСТЬ IV: НЕЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

И. С. КРАСИЛЬЩИК,
ЯНВАРЬ 2000

Предуведомление. Для сдачи экзамена достаточно решить любые три и приведенных ниже задач. Желательно, чтобы распределение задач по сдающим экзамен студентам было более или менее равномерным. Решения в виде TEX-файлов просьба присылать по адресу, указанному в конце списка.

ЗАДАЧА 1. Докажите, что пространство любого конечномерного накрытия изоморфно бесконечному продолжению некоторого дифференциального уравнения (т.н. *накрывающее уравнение*).

ЗАДАЧА 2. Пусть уравнение $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям теоремы о p строчках и $\tau\colon W \to \mathcal{E}^\infty$ — накрытие над его бесконечным продолжением. Тогда накрывающее уравнение (см. задачу 1) удовлетворяет теореме о q строчках для некоторого q.

1. При каких условиях $q \leq p$?
2. Приведите пример, когда $q > p$.

ЗАДАЧА 3. Пусть $\tau^v = \tau^v(\mathcal{E}^\infty)\colon T^v\mathcal{E}^\infty \to \mathcal{E}^\infty$ — расслоение вертикальных касательных векторов к $\mathcal{E}^\infty$.

1. Опишите естественную структуру накрытия в τ^v.
2. Опишите алгебру нелокальных симметрий этого накрытия.

ЗАДАЧА 4. Докажите, что справедливы следующие факты:

1. Производящие функции симметрий уравнения $\mathcal{E}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с сечениями накрытия τ^v, являющимися морфизмами многообразий с распределениями.
2. Если $\tau\colon W \to \mathcal{E}^\infty$ — накрытие, то тени τ-симметрий находятся во взаимно-однозначном соответствии с сечениями индуцированного расслоения $\tau^*(\tau^v)$, являющимися морфизмами многообразий с распределениями.

Попытайтесь дать геометрическую интерпретацию скобки Якоби производящих функций.

ЗАДАЧА 5. Преобразования Беклунда можно перемножать: если $(W_{12}, \tau_1, \tau_2, \mathcal{E}_1^\infty, \mathcal{E}_2^\infty)$ и $(W_{23}, \rho_2, \rho_3, \mathcal{E}_2^\infty, \mathcal{E}_3^\infty)$ — два таких преобразования, то их композиция определяется из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & & W_{13} \arrow[dl, "\tau_2^*(\rho_2)"'] \arrow[dr, "\rho_2^*(\tau_2)"] & & \\
 & W_{12} \arrow[dl, "\tau_1"'] \arrow[dr, "\tau_2"] & & W_{23} \arrow[dl, "\rho_2"'] \arrow[dr, "\rho_3"] & \\
\mathcal{E}_1^\infty & & \mathcal{E}_2^\infty & & \mathcal{E}_3^\infty
\end{tikzcd}$$

Очевидно, это умножение ассоциативно. Таким образом, если $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}$, на множестве автопреобразований Беклунда $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ уравнения $\mathcal{E}$ возникает мультипликативная структура.

Какое разумное отношение эквивалентности можно ввести в $\mathcal{B}(\mathcal{E})$, чтобы соответствующие классы образовали группу?

ЗАДАЧА 6 (конструкция Михала Марвана). Пусть

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\
\mathcal{E}^\infty & & \mathcal{E}^\infty
\end{tikzcd}$$

— автопреобразование Беклунда. Перерисуем его в виде

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, "\tau"'] & & W \arrow[dl, "\rho"] \\
 & \mathcal{E}^\infty &
\end{tikzcd}$$

Тогда можно построить следующую бесконечную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "\tau_3"] & W_2 \arrow[r, "\tau_2"] \arrow[d, "\rho_2"] & W_1 \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "\rho_1"] & W_0 \arrow[d, "\rho_0"] \\
\dots \arrow[r, "\tau_2"] & W_1 \arrow[r, "\tau_1"] & W_0 \arrow[r, "\tau_0"] & \mathcal{E}^\infty
\end{tikzcd}$$

где $\tau_0 = \tau$, $\rho_0 = \rho$, $\tau_{i+1} = \rho_i^*(\tau_i)$, $\rho_{i+1} = \tau_i^*(\rho_i)$, а W_{i+1} — тотальное пространство соответствующего индуцированного расслоения.

В этой диаграмме — все стрелки накрытия, а проективный предел W_∞ снабжен двумя преобразованиями Ли $\tau_\infty, \rho_\infty \colon W_\infty \to W_\infty$, причем, очевидно, $\tau_\infty \circ \rho_\infty = \rho_\infty \circ \tau_\infty$. Таким образом, каждому автопреобразованию Беклунда $\mathbf{B} = (W, \tau, \rho, \mathcal{E}^\infty)$ можно сопоставить тройку $\mathcal{L}(\mathbf{B}) = (W_\infty, \tau_\infty, \rho_\infty)$.

1. Что можно сказать о композиции $\rho_\infty \circ \tau_\infty$?
2. Исследуйте связь между композицией преобразований Беклунда, определенной в задаче 5 и конструкциями данной задачи.

ЗАДАЧА 7. Докажите, что для любого накрытия $\tau \colon W \to \mathcal{E}^\infty$ существует накрытие $\tau' \colon W' \to W \xrightarrow{\tau} \mathcal{E}^\infty$, обладающее следующим свойством: любая τ-тень, т.е. решение уравнения

$$\ell_{\mathcal{E}}^\tau(\varphi) = 0,$$

где $\ell_{\mathcal{E}}^\tau$ — поднятие оператора универсальной линеаризации в накрытие τ, восстанавливается до τ'-симметрии.

ЗАДАЧА 8. Докажите, что если Ω — тень оператора рекурсии в накрытии τ, т.е. решение уравнения

$$\ell_{\mathcal{E}}^\tau(\Omega) = 0, \tag{1}$$

где Ω принадлежит модулю Картана $\mathcal{C}\Lambda^1(W)$, а X — нелокальная τ-симметрия, то подстановка $\mathrm{i}_X\Omega$ — тень τ-симметрии.

ЗАДАЧА 9. Мы знаем два определения оператора рекурсии:

(a) как решения уравнения (1);
(b) как преобразования Беклунда над пространством $T^v\mathcal{E}^\infty$ (см. задачу 3).

Сравните эти два определения:

1. Докажите, что всякий оператор рекурсии в смысле (a) является и оператором в смысле (b).
2. Постройте пример оператора в смысле (b), не являющегося оператором рекурсии в смысле (a).

ЗАДАЧА 10. Если воспользоваться определением (b) оператора рекурсии из задачи 9, то становится понятным, что такие операторы можно обращать — достаточно поменять местами стрелки в диаграмме, отвечающей соответствующему преобразованию Беклунда. Значит, операторы рекурсии действуют не только “вверх”, но и “вниз”.

1. Попробуйте эффективно реализовать эту конструкцию для известных операторов рекурсии (например, для уравнений Бюргерса и Кортевега–де Фриза) и получить явные формулы для возникающих при этом симметрий (хотя бы нескольких первых).
2. В каких накрытиях реализуются тени таких симметрий?

ЗАДАЧА 11. Очевидно, конструкция T^v (см. задачу 3) применима не только к расслоениям $\mathcal{E}^\infty \to M$, но и к произвольным расслоениям, причем соответствие

$$\xi\colon P \to M \Rightarrow T^vP \to P$$

функториально.

Применяя этот функтор к преобразованию Беклунда $\mathbf{B} = (W, \rho, \rho', \mathcal{E}^\infty)$, мы получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & T^vW \arrow[dl, "T^v(\rho)"'] \arrow[d, "\tau^v(W)"] \arrow[dr, "T^v(\rho')"] & \\
T^v\mathcal{E}^\infty \arrow[d, "\tau^v(\mathcal{E}^\infty)"'] & W \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\rho'"] & T^v\mathcal{E}^\infty \arrow[d, "\tau^v(\mathcal{E}^\infty)"] \\
\mathcal{E}^\infty & & \mathcal{E}^\infty
\end{tikzcd}$$

Значит, каждому преобразованию Беклунда соответствует оператор рекурсии в смысле п. (b) задачи 9.

Выпишите явные формулы действия таких операторов для известных преобразований Беклунда (например, для уравнений Кортевега–де Фриза, sine-Гордона и др.).

ЗАДАЧА 12. Классическую ситуацию, в которой Беклунд построил свое первое преобразование, а Бьянки доказал “теорему перестановочности”, позволившую найти явные решения уравнения sine-Гордон (см. подробней в задаче 16), можно описать следующим образом.

Пусть задано уравнение $\mathcal{E}$ и накрытие $\tau\colon W \to \mathcal{E}^\infty$ над ним.

Вопрос. Существует ли такое гладкое семейство накрытий τ_λ, что все накрытия τ_λ, $\tau_{\lambda'}$ попарно неэквивалентны при $\lambda \neq \lambda'$, а их тотальные пространства изоморфны как оснащенные многообразия? Иными словами, существует ли деформация структуры накрытия, обладающая указанными свойствами?

Приведем ответ, т.к. он понадобится для последующих задач.

Ответ. Если такая деформация существует, то ее инфинитезимальная часть имеет вид $[\![U_\tau, \varphi]\!]$, где U_τ — структурный элемент накрытия τ, φ — тень симметрии в этом накрытии, $[\![\cdot,\cdot]\!]$ — скобка Фролихера–Ниейнхейса.

1. Докажите этот факт.
2. Какая тень соответствует семейству классических преобразований Беклунда уравнения sine-Гордон?

ЗАДАЧА 13. Вопрос о существовании формальных деформаций связан с тривиальностью некоторых 2-когомологий, ассоциированных с накрытием τ (выясните, каких). Однако, в силу решения задачи 12, можно попытаться искать эти деформации в специальном виде

$$\exp(\lambda\varphi)U_\tau = U_\tau + \lambda[\![U_\tau, \varphi]\!] + \frac{1}{2}\lambda^2[\![[\![U_\tau, \varphi]\!], \varphi]\!] + \cdots \tag{2}$$

1. Выясните, при каких условиях ряд (2) действительно приводит к необходимой формальной деформации.
2. Попробуйте построить такую деформацию для уравнения Кортевега–де Фриза, используя тень его первой нелокальной симметрии $tu_3 + \cdots$

ЗАДАЧА 14. Конечно, частным случаем решения задачи 12 являются тени, которые восстанавливаются до τ-симметрий в самом накрытии τ. Постройте деформации одномерного накрытия уравнения Бюргерса с нелокальной переменной $u_{-1} = \int u\,dx$, соответствующие симметриям

$$\varphi_g = \big(g(x,t)u - 2g_x(x,t)\big)\exp\Big(-\frac{u_{-1}}{4}\Big),$$

где $g(x,t)$ — решение уравнения теплопроводности.

ЗАДАЧА 15. Вернемся к конструкции задачи 6 в контексте задачи 12. Если задано двупараметрическое семейство автопреобразований Беклунда, то, в силу этой конструкции, возникает двупараметрическое семейство преобразований Ли. С другой стороны, тень симметрии φ, определяющая соответствующую инфинитезимальную деформацию, восстанавливается до нелокальной инфинитезимальной симметрии в некотором накрытии.

Какова связь между полученными таким образом семейством преобразований Ли и инфинитезимальной симметрией?

ЗАДАЧА 16. Найденное Беклундом преобразование для уравнения

$$u_{xy} = \sin(u) \tag{3}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(u+\bar{u})_x &= \lambda \sin \frac{1}{2}(u-\bar{u}), \\ \frac{1}{2}(u-\bar{u})_y &= \frac{1}{\lambda} \sin \frac{1}{2}(u+\bar{u}), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Пусть u_0, u_1, u_2 и u_3 — решения уравнения (3), попарно связанные друг с другом так, как это показано на диаграмме

$$\begin{tikzcd} & u_0 \arrow[dl, "-\lambda_2"'] \arrow[dr, "-\lambda_1"] & \\ u_2 \arrow[dr, "-\lambda_1"'] & & u_1 \arrow[dl, "-\lambda_2"] \\ & u_3 & \end{tikzcd}$$

Тогда u_3 выражается через остальные решения с помощью соотношения

$$\tan \frac{1}{4}(u_0 - u_3) = \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) \tan \frac{1}{4}(u_2 - u_1).$$

Это — теорема перестановочности преобразований Беклунда, или формула нелинейной суперпозиции, для решений уравнения sine-Гордон. В частности, стартуя с $u_0 = 0$, можно получить так называемые n-кинковые решения этого уравнения.

Пользуясь результатами задачи 12, попробуйте сформулировать и доказать аналог этого утверждения в общей ситуации.

ЗАДАЧА 17. Понятие формальной деформации (будь то деформация накрытий или структуры уравнения) как разложения в ряд по крайней мере внешне выглядит “не совсем геометрическим”. Мы, однако, знаем, что геометрическим аналогом формального ряда является точка пространства бесконечных джетов.

Попробуйте построить геометрическую теорию уравнений, зависящих от параметра, определите в ней основные конструкции и выведите вычислительные формулы.

Замечание. Заметим, что в этой теории должны приобрести смысл слова “приближенная симметрия с точностью до...” и т.п. Обратите внимание на подобные “приближенные конструкции”.

E-mail address: josephk@glasnet.ru