# Лекция 1.

6 сентября 1999 г.

В предыдущем семестре мы в основном обсуждали конечномерные интегрируемые системы. Важнейший класс таких систем – гамильтоновы системы, интегрируемые по Лиувиллю. Напомним их определение.

**Определение 1** *Пусть $M$ – конечномерное гладкое многообразие $M$, на котором задана дополнительная структура – кососимметричное тензорное поле $\omega^{ij}(\vec{x}) = -\omega^{ji}(\vec{x})$ с двумя верхними индексами (бивекторное поле). Тогда на пространстве функций на $M$ определена следующая кососимметричная скобка:*

$$\{f, g\} = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \omega^{ij}(\vec{x}) \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x^j}. \tag{1}$$

**Определение 2** *Многообразие $M$ с заданным на нем кососимметрическим бивекторным полем полем называется* **пуассоновым многообразием**, *а скобка (1) –* **скобкой Пуассона**, *если для любой тройки функций $f(\vec{x})$, $g(\vec{x})$, $h(\vec{x})$ на $M$ тождественно по $\vec{x}$ выполнено следующее тождество Якоби*

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} \equiv 0. \tag{2}$$

**Определение 3** *Пусть $M$ – некоторое пуассоново многообразие, $H$ – произвольная гладкая функция на $M$. Порождаемое $H$* **Гамильтоново векторное поле** *задается формулой*

$$\frac{dx^i}{dt} = \{x^i, H\}, \tag{3}$$

*где $x^i$ – локальные координаты на $M$.*

*Функция $H$ называется* **Гамильтонианом** *потока (3).*

**Упражнение 1** . *Для производной произвольной функции $f(\vec{x})$ вдоль поля (3) имеет место соотношение*

$$\frac{df(\vec{x})}{dt} = \{f, H\}, \tag{4}$$

*откуда, в частности, следует корректность последнего определения.*

**Пример 1** *Пусть $M$ – симплектическое многообразие, т.е. $M$ – четномерное многообразие, на котором задана невырожденная замкнутая 2-форма $\Omega = \omega_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j$, $d\Omega = 0$. Тогда тензорное поле $\omega^{ij}(\vec{x})$, где $\omega^{ij}(\vec{x})$ матрица, обратная к $\omega_{ij}(\vec{x})$ задает пуассонову структуру на $M$. Тем самым, любое симплектическое многообразие автоматически является пуассоновым.*

Лет 20 назад понятие гамильтоновой системы обычно определялось в терминах симплектической структуры (смотри например книгу Арнольда "Математические методы классической механики"). Преимущество такого подхода в том, что тождество Якоби эквивалентно **линейному** условию замкнутости на форму $\Omega = \omega_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j$. В то же время в терминах тензора $\omega^{ij}(\vec{x})$ с верхними индексами тождество Якоби уже нелинейно. Однако во многих важных примерах тензор $\omega^{ij}(\vec{x})$ оказывается везде вырожденным и обратить его, чтобы получить симплектическую структуру нельзя. В этом случае перейти к симплектическому описанию гамильтовых систем можно следующим образом:

**Определение 4** *Функция $K$ на Пуассоновом многообразии называется* **аннулятором скобки Пуассона** *или* **функцией Казимира**, *если ее скобка Пуассона со всеми функциями на $M$ тождественно равна 0.*

$$\forall f \in C^{(\infty)}(M) \qquad \{f, H\} \equiv 0. \tag{5}$$

Пусть $K_1, \ldots, K_k$ – полный набор функций Казимира на $M$. Тогда ограничение тензора $\omega^{ij}(\vec{x})$ на подмногообразие линий уровня функций Казимира (называемое симплектическим листом)

$$K_1 = c_1, \ldots K_k = c_k \tag{6}$$

корректно определено и невырождено в точках общего положения, поэтому на каждом симплектическом листе пуассонову структуру можно обернуть и получить симплектическую структуру (возможно с особенностями).

Отметим, что функции Казимира инвариантны относительно всех гамильтоновых потоков на $M$, поэтому их естественно рассматривать как законы сохранения, порождаемые геометрией скобки Пуассона. Поскольку все гамильтоновы потоки оставляют инвариантными симплектические листы, то естественно с самого начала ограничиться на один симплектический лист, который уже является одновременно как пуассоновым, так и симплектическим многообразием. Однако это не всегда удобно.

**Пример 2** *Пусть $M$ – двойственное пространство к алгебре Ли $g$ с базисом $e^1$, …, $e^n$ и коммутатором*

$$[e^i, e^j] = c_k^{ij} e^k \tag{7}$$

*($c_k^{ij}$ называются структурными константами алгебры), $M = g^*$. Тогда элементы алгебры $e^j$ естественно интерпретировать как линейные функции на $M$ (обозначим эти функции $x^j$ соответственно.) Тем самам на линейных функциях на $M$ задана скобка Пуассона*

$$[x^i, x^j] = c_k^{ij} x^k, \qquad \omega^{ij}(\vec{x}) = c_k^{ij} x^k, \tag{8}$$

*естественно продолжающаяся на все гладкие функции на $M$, и мы получаем пуассоново многообразие с линейно зависящей от координат скобкой. Она называется скобкой Ли-Костанта-Кириллова. Как правило, эта скобка вырождена и имеет нетривиальные функции Казамира.*

Рассмотрим простейший пример.

**Пример 3** *Пусть $g$ – алгебра Ли $so(3)$ с базисом $e^1$, $e^2$, $e^3$ и коммутатором*

$$[e^1, e^2] = -[e^2, e^1] = e^3, [e^2, e^3] = -[e^3, e^2] = e^1, [e^3, e^1] = -[e^1, e^3] = e^2. \tag{9}$$

*Соответствующая скобка Пуассона имеет вид*

$$\omega^{12}(\vec{x}) = -\omega^{21}(\vec{x}) = x^3, \omega^{23}(\vec{x}) = -\omega^{32}(\vec{x}) = x^1, \omega^{31}(\vec{x}) = -\omega^{13}(\vec{x}) = x^2. \tag{10}$$

*Простейшая функция Казимира этой скобки имеет вид $K = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$, общий Казимир записывается в виде $f(K)$, где $f(x)$ – произвольная функция одной переменной. Симплектические листы этой скобки – сферы $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \mathrm{const}$,*

**Упражнение 2** . *Ограничение описанной скобки на линии уровня $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \mathrm{const}$ невырождено при $\mathrm{const} > 0$.*

Гамильтонов подход очень удобен при исследовании законов сохранения (интегралов системы). Действительно, из формулы (3) видно, что функция $f$ является интегралом потока с гамильтонианом $H$ тогда, и только тогда, когда $\{f, H\} \equiv 0$. В частности благодаря косой симметрии скобки для любого $H$ $\{f, H\} \equiv 0$, т.е. гамильтониан всегда является интегралом движения.

Из тождества Якоби следует, что скобка Пуассона двух интегралов движения – снова интеграл движения. Легко также убедиться, что потоки, порожденные гамильтонианами $H_1$ и $H_2$ коммутируют между собой, если и только если скобка Пуассона $\{H_1, H_2\}$ – функция Казимира. В частности, если $\{H_1, H_2\} \equiv 0$, то порождаемые ими потоки заведомо коммутируют.

**Определение 5** *Функции $H_1$ и $H_2$ на пуассоновом многообразии находятся в инволюции, если*

$$\{H_1, H_2\} \equiv 0. \tag{11}$$

**Определение 6** *Пусть $M$ – пуассоново многообразие размерности $2n+k$ с $k$ независимыми Казимирами $K_1, \ldots, K_k$ и на нем задана гамильтонова система с гамильтонианом $H$ такая, что она допускает $n$ независимых интегралов движения в инволюции $H_1 = H, H_2, \ldots, H_n$, $\{H_i, H_j\} \equiv 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда эта система называется* **вполне интегрируемой по Лиувиллю**.

Как мы уже отмечали ранее, в случае общего положения можно ограничить нашу систему на $2n$-мерный симплектический лист

$$K_1 = c_1, \ldots K_k = c_k \tag{12}$$

поэтому без почти потери общности можно считать, что мы имеем $n$ интегралов в инволюции на $2n$-мерном симплектическом многообразии. Рассмотрим $n$-мерное подмногообразие $N_d$ – множество уровня законов сохранения

$$H_1 = d_1, \ldots H_n = d_n. \tag{13}$$

Оно инвариантно относительно $n$ коммутирующих потоков, порождаемых гамильтонианами $H_j$. Зафиксируем на нем точку $x_0$. Любая точка подмногообразия $N_d$ в окрестности $x_0$ получается из $x_0$ сдвигом на время $t_1$ вдоль потока с гамильтонианом $H_1$ плюс сдвиг на время $t_2$ вдоль потока с гамильтонианом $H_2$ плюс ... плюс сдвиг на время $t_n$ вдоль потока с гамильтонианом $H_n$. Тем самым мы получаем систему локальных координат на $N_d$ в окрестности $x_0$.

Отметим следующие важные свойства интегрируемых по Лиувиллю систем.

1. Система называется интегрируемой в квадратурах, если ее решение через задающие ее функции при помощи следующих операций

   (a) Алгебраических операций над функциями, включая подстановку.

   (b) Операций дифференциирования и интегрирования.

   (c) Решения систем уравнений вида

   $$\begin{cases} F_1(y_1, \ldots, y_s) = 0 \\ \ldots \\ F_q(y_1, \ldots, y_s) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

   где $y_j$ – некоторые независимые переменные.

   Согласно **теореме Ливилля об интегрируемости** из интегрируемости по Лиувиллю следует интегрируемость в квадратурах.

2. Более того, с помощью квадратур можно построить такой набор локальных координат $H_1, \ldots H_n, \tau_1, \ldots, \tau_n$, что

   $$\{H_i, H_j\} = \{\tau_i, \tau_j\} = 0, \quad \{\tau_i, H_j\} = \delta_{ij}. \tag{15}$$

   В этих координатах система линеаризуется.

3. Пусть подмногообразие $N_d$ для некоторой области значений констант $d_j$ компактно, неособо и потоки на нем, порождаемые гамильтонианами $H_j$ линейно независимы во всех точках. Тогда в этой области значений констант $d_j$ $N_d$ – $n$-мерные торы и потоки на них – движение по прямолинейным обмоткам.

4. В предположениях предыдущего пункта преобразованием в квадратурах вводятся переменные действие-угол, т.е. такой набор переменных $I_1, \ldots I_n$, $\phi_1, \ldots \phi_n$, что

(a) $\phi_1, \ldots \phi_n$ – углы на торах $N_d$.

(b) Переменные действия $I_j$ являются функциями гамимльтонианов $H_j$.

(c) Скобки Пуассона переменных действие-угол имеют канонический вид

$$\{I_i, I_j\} = \{\phi_i, \phi_j\} = 0, \quad \{\phi_i, I_j\} = \delta_{ij}. \tag{16}$$

Эти определения могут служить отправной точкой при переходе к бесконечномерным системам. В настоящее время пока нет единого определения интегрируемости для уравнений в частных производных, и различные подходы не всегда оказываются эквивалентными. Систему естественно считать интегрируемой, если она обладает хотя бы каким-либо из перечисленных ниже свойств.

1. Бесконечномерные гамильтоновы системы, интегрирумые по Лиувиллю. Это системы с бесконечным набором интегралов движения в инволюции таким, что после фиксации значений всех функций Казимира и всех интегралов движения действие порождаемых этими интегралами потоков локально транзитивно. Для некоторых (но далеко не всех) систем, которые считаются в настоящее время интегрируемыми, это удается доказать.

2. Системы, для которых можно построить переменные действие-угол.

3. Линейные уравнения, а также уравнения приводящиеся заменой переменных к линейному виду.

4. Уравнения, имеющие достаточно большой запас явных решений (в известных специальных функциях).

5. Уравнения, допускающие представление типа представления Лакса, или, что примерно то же самые, интегрирумые с помощью преобразования рассеяния (их изучение и является основной целью нашего курса). Поскольку в настоящее время развитие теории еще не завершено, то трудно дать общее определение и вместо этого мы обсудим ряд конкретных примеров.

Наибольшее внимание будет уделено исследованию уравнения Кортевега-де Фриза (KdV).

$$u_t - \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x = 0, \tag{17}$$

где $u = u(x, t)$ – функция 2 переменных. Это уравнение было исторически первым, проинтегрированным с помощью преобразования рассеяния Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой в 1967 году и на его примере можно продемонстрировать многие методы современной теории солитонов, избегая при этом ненужных технических трудностей.

Интегрирование KdV базирутся на использовании следующего представления, найденного Лаксом в 1968 году. Пусть $L$ – вспомогательный одномерный оператор Шредингера

$$L = -\partial_x^2 + u(x, t) \tag{18}$$

зависящий от переменной $t$ как от параметра,

$$A = \partial_x^3 - \frac{3}{2}u(x, t)\partial_x - \frac{3}{4}u(x, t)_x. \tag{19}$$

Прямое вычисление показывает, что уравнение (17) выполнено тогда и только тогда, когда имеет место следующее операторное равенство

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [A, L] \tag{20}$$

которое мы и будем эксплуатировать в дальнейшем. Равенство (20) понимается следующим образом. Прямое вычисление показывает, что коммутатор коэффициенты оператора $A$ подобраны так, что в коммутаторе $[A, L] = AL - LA$ все члены порядка выше 0 сокращаются, и он оказывается оператором нулевого порядка, а именно оператором умножения на функцию $\frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}uu_x$. Оператор $\partial_x^2$ не зависит от $t$, поэтому $\frac{\partial L}{\partial t}$ – также обыкновенный дифференциальный оператор нулевого порядка, а именно оператор умножения на $u_t$.

Отметим, что для взятого наугад обыкновенного дифференциального оператора $A$ соотношение (20) не задает потока на пространстве операторов Шредингера , поскольку в правой части получается порядок выше 0. О том, как можно подбирать специальные операторы $A$ такие, чтобы получалась корректно заданная эволюция, мы поговорим позднее.