Лекция 2.

13 сентября 1999 г.

Приведем несколько примеров интегрируемых уравнений в частных производных (конечно же этот список ни в коей мере не претендует на полноту).

Пример 1 *Линейная система с постоянными коэффициентами*

$$u_t = P(\partial_x)u, \quad u = u(x,t), \tag{1}$$

где

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \tag{2}$$

– произвольный многочлен с постоянными коэффициентами,

$$P(\partial_x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \partial_x^n. \tag{3}$$

Она интегируется при помощи преобразования Фурье

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\hat{u}(k,t)dk. \tag{4}$$

Уравнение для преобразования Фурье имеет вид

$$\hat{u}_t = P(ik)\hat{u}, \tag{5}$$

и тривиально интегрируется.

$$\hat{u}(k,t) = e^{P(ik)t}\hat{u}(k,0). \tag{6}$$

Тем самым мы имеем следующую схему решения задачи Коши. Сперва по функции $u(x,0)$ мы находим ее преобразование Фурье

$$\hat{u}(k,0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}u(x,0)dx, \tag{7}$$

затем по формуле (6) находим $\hat{u}(k,t)$ при всех t, и, наконец, по формуле (4) находим $u(x,t)$ при всех t.

Пример 2 *Уравнения, линеаризующиеся заменой переменных. (C-integrable systems в терминологии Калоджеро, C - сокращение от Change). Простейший пример – уравнение Бюргерса*

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x, \quad u = u(x,t). \tag{8}$$

Подстановкой

$$u(x,t) = (\ln v(x,t))_x = \frac{v(x,t)_x}{v(x,t)} \tag{9}$$

оно приводится к линейному виду

$$v_t = v_{xx}. \tag{10}$$

Пример 3 *Квазилинейное уравнение*

$$u_t = f(u)u_x, \quad u = u(x,t). \tag{11}$$

Пусть локально $u(x,0)_x \neq 0$. Введем обратную функцию $x = x(u,0)$. Уравнение для обратной функции уже тривиально интегрируется

$$x(u,t) = x(u,0) + f(u)t. \tag{12}$$

Тем не менее эта система достаточно нетривиальна. В частности, в ней возникают ударные волны за счет нарушения взаимной однозначности.

Пример 4 *Многокомпонентные системы гидродинамического типа с одной пространственной переменной.*

$$\vec{u}_t = \hat{A}(\vec{u})\vec{u}_x, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \\ \dots \\ u_N(x,t) \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где $\hat{A}(\vec{u})$ – некоторая $N \times N$ матрица, зависящая от вектора $\vec{u}$.

Пусть $N = 2$. Тогда система линеаризуется преобразованием годографа: мы рассматриваем u_1 и u_2 как независимые переменные, а x и t как функции от них.

Пусть $N \geq 3$. Тогда общая система (13) уже не интегрируема. Согласно теореме Царева для интегрируемости (13) достаточно, чтобы были выполнены следующие условия (они не являются необходимыми):

1. Заменой переменной в u – пространстве $\vec{w} = \vec{w}(\vec{u})$ матрица $\hat{A}(\vec{u})$ приводилась к диагональному виду
$$\hat{A}(\vec{w}) = \begin{bmatrix} v_1(\vec{w}) & 0 & \ldots 0 \\ 0 & v_2(\vec{w}) & \ldots 0 \\ & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots v_n(\vec{w}) \end{bmatrix}. \qquad (14)$$
Координаты, в которых система (13) приводится к дигональному виду, называются инвариантами Римана.

2. Система была полугамильтонова, т.е. были выполнены следующие соотношения для скоростей $v_j(\vec{w})$
$$\partial_j\left(\frac{\partial_k v_l}{v_k - v_l}\right) = \partial_k\left(\frac{\partial_j v_l}{v_j - v_l}\right), \quad \text{где} \ \ j \neq k \neq l, \qquad \partial_j = \frac{\partial}{\partial w_j} \qquad (15)$$

(Мы не будем обсуждать, что означает термин “полугамильтоновость”, отметим только, что если эта система допускает гамильтонов формализм гидродинамическго типа, то условие (15) всегда выполнено).

Матрица $\hat{A}(\vec{u})$ – это тензор в u-пространстве с одним верхним и одним нижним индексом (аффинор). В размерности $N \geq 3$ поле аффиноров общего положения уже не приводится к диагональному виду заменой координат в целой области, хотя и диагонализирется в любой отдельно взятой точке. Действительно, в каждой точке мы имеем N собственных подпространств, т.е. мы имеем N полей направлений (полей директоров). Тогда каждой паре собственных чисел отвечает натянутое на нее двумерное инвариантное подпространство, т.е. мы имеем $N(N-1)/2$ поле плоскостей в нашей области. Пусть $N = 3$. Поле аффиноров приводится к дигональному виду заменой координат тогда и только тогда, когда каждое из этих полей плоскостей является касательным к однопараметрическому семейству двумерных поверхностей, т.е. оно интегрируемо. Но в отличие от поля направлений поле плоскостей бывает неинтегрируемо.

Упражнение 1 . *Доказать, что поле плоскостей*
$$dz = y dx \qquad (16)$$
не является полем касательных к семейству двумерных поверхностей ни в какой области.

Упражнение 2 . *Поле плоскостей*

$$dz = a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy \tag{17}$$

интегрируемо тода и только тогда, когда

$$a(x,y,z)_y + b(x,y,z)a(x,y,z)_z = b(x,y,z)_x + a(x,y,z)b(x,y,z)_z. \tag{18}$$

Упражнение 3 . *Пусть поле плоскостей задано уравнением*

$$\Omega(d\vec{x}) = 0, \quad \text{где} \quad \Omega = a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz \tag{19}$$

и в окрестности точки $\vec{x}_0$ форма Ω нигде не обращается в 0. Тогда оно интегрирумо в этой окрестности если и только если

$$\Omega \wedge d\Omega \equiv 0 \tag{20}$$

(Теорема Фробениуса).

Приведем теперь несколько примеров систем, интегрируемых методом обратной задачи теории расеяния. В терминологии Калоджеро это S-integrable systems (S означает scattering).

Пример 5 *Уравнение Кортевега-де Фриза (KdV).*

$$u_t - \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x = 0, \tag{21}$$

где $u = u(x,t)$ – функция 2 переменных. Его представление Лакса имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [A, L], \tag{22}$$

где

$$L = -\partial_x^2 + u(x,t) \tag{23}$$

$$A = \partial_x^3 - \frac{3}{2}u(x,t)\partial_x - \frac{3}{4}u(x,t)_x. \tag{24}$$

Пример 6 *Нелинейное Уравнение Шредингера (NLS).*

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + 2\kappa^2|\psi|^2\psi, \quad \psi = \psi(x,t) \tag{25}$$

В последнее время это уравнение активно используется для описания распространения коротких импульсов в оптических волокнах. Есть надежда, что разрабатываемые технологии позволят поднять скорость передачи информации в современных волокнах до 40 гигабит в секунду и более (сейчас характерные скорости – порядка 400 мегабит в секунду, т.е. в 100 раз ниже). Это позволит выйти на новый уровень сети Интернет.

Нелинейное уравнение Шредингера представляется как условие совместности следующей пары всмомогательных линейных задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,t,\lambda)}{\partial x} = U(x,t,\lambda)F(x,t,\lambda) \\ \\ \dfrac{\partial F(x,t,\lambda)}{\partial t} = V(x,t,\lambda)F(x,t,\lambda) \end{cases} \tag{26}$$

где $F(x,t,\lambda)$ – двухкомпонентный вектор

$$F(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} F_1(x,t,\lambda) \\ F_2(x,t,\lambda) \end{pmatrix} \tag{27}$$

$U(x,t,\lambda)$, $V(x,t,\lambda)$ – 2×2-матрицы

$$U(x,t,\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{2i} & \kappa\bar{\psi}(x,t) \\ \kappa\psi(x,t) & -\frac{\lambda}{2i} \end{bmatrix}, \tag{28}$$

$$V(x,t,\lambda) = \begin{bmatrix} i\kappa^2\psi(x,t)\bar{\psi}(x,t) & -i\kappa\bar{\psi}(x,t)_x \\ i\kappa\psi(x,t)_x & -i\kappa^2\psi(x,t)\bar{\psi}(x,t) \end{bmatrix} - \lambda U(x,t,\lambda). \tag{29}$$

Указанное представление называется представлением нулевой кривизны или $U-V$ парой. Здесь операторы, входящие в $U-V$ пару полиномиально зависят от λ.

Наиболее интересен случай, когда κ^2 – вещественно. Аналитические свойства NLS существенно зависят от знака κ^2. Уравнение с $\kappa = 1$ называется дефокусирующим NLS, уравнение с $\kappa = i$ называется NLS с самофокусировкой.

Пример 7 *Уравнение Синус-Гордон (Sine-Gordon).*

$$u_{xt} = \sin u, \quad u = u(x,t). \tag{30}$$

Представление нулевой кривизны для него имеет вид

$$\Psi_x = \begin{bmatrix} i\lambda & \frac{i}{2}u_x \\ \frac{i}{2}u_x & -i\lambda \end{bmatrix} \Psi, \quad \Psi = \Psi(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x,t,\lambda) \\ \Psi_2(x,t,\lambda) \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$\Psi_t = \frac{1}{4i\lambda} \begin{bmatrix} \cos u & -i\sin u \\ i\sin u & -\cos u \end{bmatrix} \Psi. \tag{32}$$

Спектральный параметр λ здесь рационально входит в $U - V$-пару.

Это уравнение возникло в конце прошлого века при описании поверхностей постоянной отрицательной кривизны в R^3 и было достачно внимательно исследовано. В частности для него было найдено так называемое преобразование Бэклунда, позволяющее строить новые решения по уже известным.

Пример 8 *Уравнение Кадомцева-Петвиашвили (КП). Это уравнение с двумя пространственными и одной временной переменной естественно возникло в физике волн с дисперсией.*

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x = 3\alpha^2 u_{yy}, \quad u = u(x,y,t). \tag{33}$$

Два важнейших случая –

$\alpha = i$ – уравнение Кадомцева-Петвиашвили 1 и

$\alpha = 1$ – уравнение Кадомцева-Петвиашвили 2.

С аналитической точки зрения они существенно отличаются, хотя с точки зрения формальной алгебры одно из них получается из другого заменой $y \to iy$. В частности для КП 2 доказано, что все двоякопериодические решения аппроксимируются конечнозонными, а для КП 1 это открытая проблема, требующая существенно новых идей.

Представление нулевой кривизны имеет вид

$$[L, A] = 0, \tag{34}$$

где

$$L = \alpha\partial_y - \partial_x^2 + u(x,y,t) \tag{35}$$

$$A = \partial_t - 4\partial_x^3 + 6u(x,y,t)\partial_x + 3u(x,y,t)_x + 3\alpha w(x,y,t), \quad w_x = u_y. \tag{36}$$

Пример 9 *Уравнение Веселова-Новикова.*

$$u_t = 8\partial_z^3 u + 8\partial_{\bar z}^3 u + 2\partial_{\bar z}(uw) + 2\partial_z(u\bar w), \tag{37}$$

где

$$u = u(z,\bar z,t), \quad w = w(z,\bar z,t), \quad u(z,\bar z,t) = \bar u(z,\bar z,t), \quad \partial_z w = -3\partial_{\bar z} u. \tag{38}$$

Здесь использованы следующие обозначения. Вместо двух вещественных переменных x, y вводится одна комплексная переменная z

$$z = x + iy, \quad \bar z = x - iy, \quad \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \partial_{\bar z} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y). \tag{39}$$

При этом, если явно не оговорено обратное, рассматриваются произвольные гладкие функции 2 вещественных переменных и никакой голоморфности по z заранее не предполагается ($\partial_{\bar z} u(z,\bar z) \neq 0$ в точках общего положения).

Представление нулевой кривизны для уравнения Веселова-Новикова записывается в терминах уже не пары Лакса, а $L - A - B$ тройки Манакова:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [A, L] + BL, \tag{40}$$

$$A = 8(\partial_z^3 + \partial_{\bar z}^3) + 2(w\partial_z + \bar w\partial_{\bar z}), \tag{41}$$

$$B = w_z + \bar w_{\bar z}, \tag{42}$$

Интегрирование уравнения Веселова-Новикова осуществляется при помощи задачи рассеяния для L при нулевой энергии (а не при всех энергиях, как у KdV). Поскольку $L-$ двумерный оператор Шредингера, эта задача рассеяния интересна с физической точки зрения.

Пример 10 *Уравнение Ландау-Лившица.*

$$\vec S_t = \vec S \wedge \vec S_{xx} + \vec S \wedge J\vec S, \quad \vec S = \vec S(x,t) = \begin{pmatrix} S_1(x,t) \\ S_2(x,t) \\ S_3(x,t) \end{pmatrix}, \tag{43}$$

где $\wedge$ означает векторное произведение, J – постоянная диагональная матрица

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad J_1 < J_2 < J_3. \tag{44}$$

Представление нулевой кривизны имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,t,\lambda)}{\partial x} = U(x,t,\lambda)F(x,t,\lambda) \\ \\ \dfrac{\partial F(x,t,\lambda)}{\partial t} = V(x,t,\lambda)F(x,t,\lambda) \end{cases} \tag{45}$$

где $F(x,t,\lambda)$ – двухкомпонентный вектор

$$F(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} F_1(x,t,\lambda) \\ F_2(x,t,\lambda) \end{pmatrix}, \tag{46}$$

$U(x,t,\lambda)$, $V(x,t,\lambda)$ – 2×2-матрицы

$$U(x,t,\lambda) = \frac{1}{i}\sum_{a=1}^{3} u_a(\lambda) S_a(x,t)\sigma_a, \tag{47}$$

$$V(x,t,\lambda) = 2i\sum_{a=1}^{3} \frac{u_1(\lambda)u_2(\lambda)u_3(\lambda)}{u_a(\lambda)} S_a(x,t)\sigma_a +$$

$$+\frac{1}{i}\sum_{a,b,c=1}^{3} u_a(\lambda)\epsilon_{abc} S_b(x,t) S_c(x,t)_x \sigma_a, \tag{48}$$

$\epsilon_{abc} \neq 0$ только если числа a, b, c попарно различны,

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \quad \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = -1, \tag{49}$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \tag{50}$$

– матрицы Паули, $u_a(\lambda)$ – эллиптические функции переменной λ

$$u_1(\lambda) = \rho\frac{1}{\mathrm{sn}(\lambda,k)}, \quad u_2(\lambda) = \rho\frac{\mathrm{dn}(\lambda,k)}{\mathrm{sn}(\lambda,k)}, \quad u_3(\lambda) = \rho\frac{\mathrm{cn}(\lambda,k)}{\mathrm{sn}(\lambda,k)}, \tag{51}$$

где $\mathrm{sn}(\lambda,k)$, $\mathrm{cn}(\lambda,k)$, $\mathrm{dn}(\lambda,k)$ – эллиптические функции Якоби с модулем

$$k = \sqrt{\frac{J_2 - J_1}{J_3 - J_1}} \tag{52}$$

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{J_3 - J_1}. \tag{53}$$

Функции $u_a(\lambda)$ связаны соотношениями

$$u_a^2(\lambda) - u_b^2(\lambda) = \frac{1}{4}(J_b - J_a), \quad a, b = 1, 2, 3. \tag{54}$$

Уравнение Ландау-Лифшица интересно тем, что спектральный параметр λ "живет" на эллиптической кривой, а не на комплексной плоскости, как в предыдущих примерах.

В заключение приведем два примера интегрируемых систем с дискретной пространственной переменной.

Пример 11 *Ленгмюровская цепочка*

$$\frac{dc_n}{dt} = c_n(c_{n+1} - c_{n-1}), \quad c_n = c_n(t), \quad -\infty < n < \infty. \tag{55}$$

Представление Лакса для нее имеет вид

$$\frac{dL}{dt} = [L, A], \tag{56}$$

где L и A – бесконечные матрицы с элементами

$$L_{mn} = \sqrt{c_n}\delta_{n,m+1} + \sqrt{c_m}\delta_{n+1,m} \tag{57}$$

$$A_{mn} = \frac{1}{2}[\sqrt{c_n c_{n-1}}\delta_{n,m+2} - \sqrt{c_m c_{m-1}}\delta_{n+2,m}]. \tag{58}$$

Пример 12 *Цепочка Тода – цепочка осцилляторов с нелинейным взаимодействием*

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = e^{x_{n+1} - x_n} - e^{x_n - x_{n-1}}, \quad x_n = x_n(t), \quad -\infty < n < \infty. \tag{59}$$

Представление Лакса для нее имеет вид

$$\frac{dL}{dt} = [L, A], \tag{60}$$

где L и A – бесконечные матрицы с элементами

$$L_{mn} = \sqrt{c_n}\delta_{n,m+1} + \sqrt{c_m}\delta_{n+1,m} + v_n\delta_{nm} \tag{61}$$

$$A_{mn} = \frac{1}{2}[\sqrt{c_n}\delta_{n,m+1} - \sqrt{c_m}\delta_{n+1,m}], \qquad (62)$$

где

$$c_n = c_n(t) = e^{x_n(t) - x_{n-1}(t)}, \quad v_n = v_n(t) = \frac{d}{dt}x_n(t). \qquad (63)$$

Оператор L в данном случае естественно рассматривать как интегрируемую дискретизацию одномерного операторв Шредингера. Отметим, что стандартная дискретизация одномерного Шредингера, отвечающая $c_n \equiv 1$ неинтегрируема.