# Лекция 3.

20 сентября 1999 г.

Мы хотим проинтегрировать уравнение KdV. Для этого нам понадобится спектральная теория одномерного стационарного оператора Шредингера

$$L = -\partial_x^2 + u(x). \tag{1}$$

К счастью этот оператор хорошо исследован в квантовой механике.

Напомним несколько базисных фактов из квантовой механики. Частица без спина в потенциальном поле описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = \hat{H}\Psi(\vec{x},t), \quad \hat{H} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{x})\right], \quad \vec{x} \in R^3 \tag{2}$$

с вещественным потенциалом $U(x)$.

Если потенциал не зависит от $t$, то общее решение уравнения Шредингера удобно раскладывать по стационарным состояниям – решениям вида

$$\Psi_n(\vec{x},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\Psi_n(\vec{x},0). \tag{3}$$

где $\Psi_n(\vec{x},0)$ – решения стационарного уравнения Шредингера

$$\hat{H}\Psi_n(\vec{x},0) = E_n\Psi_n(\vec{x},0). \tag{4}$$

Если дана локализованная потенциальная яма, то в классической механике мы имеем два типа движений – финитные движения и инфинитные. В задаче Кеплера финитное движение – движение по эллиптической орбите, инфинитное движение – движение по параболе или гиперболе. Аналоги финитных траекторий в квантовой задаче – состояния, отвечающие дискретному спектру, аналоги инфинитных траекторий – точки непрерывного спектра.

Мы будем предполагать, что потенциал $U(\vec{x})$ неособый и достаточно быстро убывает на бесконечности. Тогда оператор $\hat{H}$ – неограниченный самосопряженный оператор в $L^2(R^3)$.

**Упражнение 1** . *Доказать, что оператор $\hat{H}$ неограничен в $L^2(R^3)$.*

Применяя к $\hat{H}$ спектральную теорему получаем:

**Теорема 1** *Существует пространство $M$ с мерой $\mu$ такое, что $\hat{H}$ унитарно эквивалентен оператору умножения на почти всюду конечную вещественнозначную функцию $f(m)$, действующему на пространстве $L^2(M, d\mu)$ (без доказательства).*

**Определение 1** *Точка $E$ принадлежит* **спектру** *$\hat{H}$ если оператор $(\hat{H} - E\hat{1})^{-1}$ неограничен , или, что эквивалентно, функция $(f(m) - E)^{-1}$ не является почти всюду ограниченной.*

*Точка $E$ принадлежит* **дискретному спектру**, *если мера множества $f(m) = E$ отлична от 0, или, что эквивалентно, уравнение*

$$\hat{H}\Psi(\vec{x}) = E\Psi(\vec{x}) \tag{5}$$

*имеет нетривиальные решения в пространстве $L^2(R^3)$.*

*Точка $E$ принадлежит* **непрерывному спектру**, *если после выбрасывания из пространства $M$ всех множеств $f(m) = E_n$, где $E_n$ – точки дискретного спектра функция $(f(m) - E)^{-1}$ не является почти всюду ограниченной на оставшемся множестве.*

**Замечание 1** *Некоторые авторы определяют непрерывный спектр так, чтобы он не пересекался с дискретным. Для оператора Шредингера с вещественным неособым достаточно быстро убывающим на бесконечности потенциалом дискретный спектр в нашем понимании не пересекается с непрерывным, поэтому оба определения в данном случае совпадают.*

Согласно одной из теорем функционального анализа, точка $E$ принадлежит спектру $\hat{H}$ тогда и только тогда, когда уравнение (5) имеет нетривиальное решение, не более чем полиномиально растущее на бесконечности (на самом деле непрерывный спектр $\hat{H}$ отвечает ограниченным решениям (5), не лежащим в $L^2(R^3)$.

Таким образом построение спектральной теории оператора Шредингера сводится к поиску ограниченных решений уравнения (3) и выделению среди них решений, лежащих в $L^2$.

Напомним, что потенциал $U(x)$ предполагается вещественным, неособым и достаточно быстро убывающим на бесконечности. Тогда имеет место

**Теорема 2** *1. Спектр опрератора $\hat{H}$ вещественен.*

2. *Непрерывный спектр $\hat{H}$ совпадает с полуосью неотрицательных энергий $E \geq 0$ и имеет кратность 2 для одномерного оператора и бесконечнократен в размерности больше 1*

3. *Дискретный спектр либо отсутствует либо лежит в области $E < 0$ и содержит конечное число собственных значений конечной кратности. Соответствующие собственные функции экспоненциально убывают на бесконечности.*

Для решения уравнения KdV нам нужен лишь одномерный оператор Шредингера. Начитная с этого места мы будем рассматривать лишь случай размерности 1. Кроме того, для упрощения обозначений будем считать, что $\hbar = 1$, $m = 2$. В этом случае $L = \hat{H}$. Напомним также, что оператор импульса по $x$ имеет вид $p = -i\hbar\partial_x = -i\partial_x$.

Покажем, как в этом случае строится полная система ограниченных решений (волновых функций). Нашим основным инструментом для этой цели будут интегральные уравнения.

**Определение 2** *Оператор $A$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется* **ограниченным**, *если для любого вектора $f \in \mathcal{H}$ имеет место оценка*

$$< Af, Af > \leq C_A < f, f >, \tag{6}$$

*где $C_A$ – константа, не зависящая от $f$.*

**Определение 3** *Оператор $A$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется* **компактным (фредгольмовым, вполне непрерывным)**, *если образ единичного шара – компактное множество.*

Поскольку любое компактное множество лежит в шаре конечного радиуса, любой компактный оператор автоматически ограничен. Поскольку единичный шар в гильбертовом пространстве некомпактен, ограниченность оператора не влечет за собой его компактности.

Приведем два важнейших примера компактных операторов (без доказательств).

**Пример 1** *Пусть $X$ – компактная область в $R^n$, $K(x,y)$ -непрерывная функция на $X \times X$. Тогда интегральный оператор в пространстве $C(X)$ непрерывных функций на $X$*

$$(\hat{K}f)(x) = \int\limits_X K(x,y)f(y)d^n y \tag{7}$$

*компактен.*

Отметим, что этот факт выводится из теоремы Асколи-Арцела о компактности равностепенно непрерывных ограниченных семейств непрерывных функций.

**Пример 2** *Пусть $X$ – подмножество $R^n$, $K(x,y)$ – функция из пространства $L^2(X \times X)$. Тогда интегральный оператор в пространстве $L^2(X)$*

$$(\hat{K}f)(x) = \int\limits_X K(x,y)f(y)d^n y \tag{8}$$

*компактен.*

Тем самым, интегральные операторы с не слишком сильно сингулярными ядрами компактны.

Перечислим без доказательства некоторые важные свойства компактных операторов.

**Теорема 3** *Пусть $\hat{K}$ – компактный оператор. Тогда*

1. *Вне любой окрестности точки 0 спектр $\hat{K}$ содержит не более конечного числа точек конечной кратности.*

2. *Уравнение*
$$(\hat{1} + \hat{K})f = g \tag{9}$$
*имеет решение при любом $g$ тогда и только тогда, когда однородное уравнение*
$$(\hat{1} + \hat{K})f = 0 \tag{10}$$
*не имеет ненулевых решений. Если же (10) имеет ненулевые решения, то для разрешимости уравнения (9) необходимо и достаточно, чтобы его правая часть была ортогональна ядру сопряженного оператора*
$$\hat{1} + \hat{K}^*, \tag{11}$$

*т.е. имело место*

$$< g, f^* >= 0 \quad \textit{для} \quad \textit{любого} \quad f^* \ \textit{такого, что} \quad (\hat{1}+\hat{K}^*)f^* = 0. \quad (12)$$

*Здесь $\hat{1}$ обозначает единичный оператор.*

*Это свойство, назывемое* **Альтернативой Фредгольма**, *обобщает хорошо известное свойство квадратных конечномерных матриц.*

**Замечание 2** *Для квадратной матрицы существование ненулевых решений однородного уравнения эквивалентно обращению в 0 ее определителя. Для операторов вида $\hat{1}+\hat{K}$, где $\hat{K}$ – достаточно хороший интегральный оператор, можно построить так называемый* **определитель Фредгольма**, *равенство нулю которого эквивалентно существованию однородных решений, однако мы не будем им пользоваться.*

**Определение 4** *Уравнение в гильбертовом пространстве вида*

$$(\hat{1}+\hat{K})f = g \tag{13}$$

*где $\hat{K}$ – компактный оператор, назывется* **уравнением Фредгольма второго рода**.

**Определение 5 Уравнение Фредгольма первого рода** – *уравнение в гильбертовом пространстве вида*

$$\hat{K}f = g \tag{14}$$

*где $\hat{K}$ – компактный оператор.*

Уравнения первого рода существенно сложнее, чем уравнения второго рода, поскольку они являются некорректными задачами. В нашем курсе нам будут нужны только уравнения второго рода.

Наболее просто вопрос о разрешимости линейного конечномерного уравнения с квадратной матрицей решается, если эта матрица треугольна. В этом случае разрешимость при любой правой части эквивалентна отсутствию нулей на диагонали. Для интегральных уравнений аналогами систем с треугольными матрицами служат уравнения Вольтерра.

**Определение 6** *Пусть $X$ – подмножество прямой $R^1$, $\hat{K}$ – компактный интегральный оператор в пространстве функций на $X$.*

$$(\hat{K}f)(x) = \int\limits_X K(x,y)f(y)d^n y. \tag{15}$$

*$\hat{K}$ называется* **оператором Вольтерра**, *если выполнено одно из свойств треугольности:*

1. *$K(x,y) = 0$ при всех $x < y$ (нижнетреугольный оператор).*
2. *$K(x,y) = 0$ при всех $x > y$ (верхнетреугольный оператор).*

**Определение 7** *Пусть $\hat{K}$ – оператор Вольтерра. Тогда уравнение*

$$(\hat{1} + \hat{K})f = g \tag{16}$$

**уравнением Вольтерра второго рода**, *а уравнение*

$$\hat{K}f = g \tag{17}$$

– **уравнением Вольтерра первого рода**.

Уравнение Вольтерра второго рода **всегда однозначно разрешимо**.

На этом мы покончим с абстрактым функциональным анализом и перейдем к исследованию одномерного оператора Шредингера.

$$L = -\partial_x^2 + u(x). \tag{18}$$

Напомним, что потенциал $u(x)$ будем предполагать гладким, вещественным и убывающим на бесконечности не медленнее, чем $1/|x|^{2+\epsilon}$.

Наша ближайшая задача – исследование решений уравнения

$$(-\partial_x^2 + u(x))\Psi = E\Psi. \tag{19}$$

Введем новый спектральный параметр $k$, $E = k^2$ (как мы увидим далее, $k$ будет иметь смысл импульса падающей частицы). Каждому значению $E$ будет отвечать 2 значения $k$.

$$(-\partial_x^2 + u(x))\Psi(k,x) = k^2\Psi(k,x). \tag{20}$$

Перейдем от (20) к интегральному уравнению на функцию $\Psi(k,x)$. Для этого сначала перепишем (20) в следующем виде

$$(-\partial_x^2 - k^2)\Psi(k,x) = -u(x)\Psi(k,x). \tag{21}$$

Попробуем построить обратный оператор к $(-\partial_x^2 - k^2)$.

**Определение 8 Функцией Грина (фундаментальным решением)** *дифференциального оператора $M$, действующего на функциях в $R^n$ называется решение уравнения*

$$MG(x,y) = \delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2)\dots\delta(x_n - y_n). \tag{22}$$

*Если $M$ – оператор с постоянными коэффициентами, то функцию Грина можно выбрать зависящей от разности $x-y$. В этом случае уравнение (22) приобретает вид*

$$MG(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\dots\delta(x_n). \tag{23}$$

(Вопрос о существовании и единственности функции Грина не является тривиальным. Мы не будем доказывать никаких общих теорем на этот счет).

По определению, функция Грина оператора $(-\partial_x^2 - k^2)$ – решение уравнения

$$(-\partial_x^2 - k^2)G(k,x) = \delta(x), \tag{24}$$

т.е. она удовлетворяет

$$(-\partial_x^2 - k^2)G(k,x) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0, \tag{25}$$

в точке 0 она уже не гладкая и выполнено условие сшивки

$$\begin{cases} G(k,x+0) - G(k,x-0) = 0 \\ G'(k,x+0) - G'(k,x-0) = -1. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь $G(k,x+0)$ и $G(k,x-0)$ обозначают пределы функции $G(k,x)$ при $x \to 0$ справа и слева соответственно.

Тем самым функция Грина имеет вид

$$G(k,x) = \begin{cases} \alpha_1 e^{ikx} + \alpha_2 e^{-ikx} & \text{при} \quad x < 0 \\ \alpha_3 e^{ikx} + \alpha_4 e^{-ikx} & \text{при} \quad x > 0 \end{cases} \tag{27}$$

где константы $\alpha_j$ нужно брать такими, чтобы имело место (26).

В частности, уравнению (26) удовлетворяют функции

$$G_1(k,x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0 \\ -\dfrac{\sin(kx)}{k} & \text{при} \quad x > 0, \end{cases} \tag{28}$$

$$G_2(k,x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(kx)}{k} & \text{при} \quad x < 0 \\ 0 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases} \tag{29}$$

**Теорема 4** *Пусть $\Psi(k,x)$ – некоторое решение интегрального уравнения*

$$\Psi(k,x) = e^{ikx} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(k,x-y)u(y)\Psi(k,y)dy, \tag{30}$$

*где $G(k,x)$ – какая-нибудь из функций Грина оператора $(-\partial_x^2 - k^2)$. Тогда $\Psi(k,x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (20).*

Для доказательства достаточно применить оператор $(-\partial_x^2 - k^2)$ к обеим частям (30) и воспользоваться определением функции Грина (24).