Лекция 5.

4 сентября 1999 г.

На предыдущей лекции мы доказали, что одномерное стационарное уравнение Шредингера

$$(-\partial_x^2 + u(x))\Psi(k,x) = k^2\Psi(k,x) \tag{1}$$

с вещественным гладким убывающим на бесконечности потенциалом $u(x)$ таким, что

$$|u(x)| < \frac{c}{(1+|x|)^{2+\epsilon}}, \quad \epsilon > 0 \tag{2}$$

имеет определенное при всех $k \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Im} k \neq 0$ решение $\Psi(k,x)$ со следующим набором свойств:

1. При любом фиксированном x $\Psi(k,x)$ – голоморфная при $\operatorname{Im} k \neq 0$ функция комплексной переменной k.

2. При $|k| \to \infty$ имеет место асимптотика $\Psi(k,x) = (1+o(1))e^{ikx}$.

3. На вещественной прямой $\operatorname{Im} k = 0$ функция $\Psi(k,x)$ имеет разрыв первого рода, и ее граничные значения $\Psi_1(k,x) = \Psi(k+i0,x)$, $\Psi_2(k,x) = \Psi(k-i0,x)$ тождественно по x связаны соотношением

$$\Psi_1(k,x) = a(k)\Psi_2(k,x) + b(k)\Psi_2(-k,x), \tag{3}$$

   где $a(k)$ и $b(k)$ – определенные на прошлой лекции данные рассеяния непрерывного спектра. Существенно то, что $a(k)$ и $b(k)$ не зависят от x. Напомним, что функция $s_{11}(k) = 1/a(k)$ – называется коэффициентом прохождения, функция $r(k) = b(k)/a(k)$ – коэффициентом отражения.

4. Функции $a(k)$, $b(k)$, $s_{11}(k)$, $r(k)$ обладают следующими свойствами:

   - $a(-k) = \bar{a}(k)$, $b(-k) = \bar{b}(k)$, $s_{11}(-k) = \bar{s}_{11}(k)$, $r(-k) = \bar{r}(k)$.
   - $|a(k)|^2 - |b(k)|^2 \equiv 1$, или, что эквивалентно, $|s_{11}(k)|^2 + |r(k)|^2 \equiv 1$.
   - При всех k $\quad |r(k)| \leq 1$.

5. Функция $a(k)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость переменной k, причем $a(k) \to 1$ при $|k| \to \infty$.

6. Все нули функции $a(k)$ простые, лежат на прямой $\mathrm{Re}\, k = 0$ и $a(i\kappa_j) = 0$ тогда и только тогда, когда $E_j = -\kappa_j^2$ – точка дискретного спектра. (Если дискретный спектр отсутствует, то $a(k)$ вообще не имеет нулей.)

7. Если $i\kappa_j$, $\kappa_j > 0$ – нуль функции $a(k)$, то имеет место соотношение

$$\Psi(i\kappa_j, x) = b_j \Psi(-i\kappa_j, x) \tag{4}$$

   где b_j – "данные рассеяния дискретного спектра".

Оказывается, что перечисленные выше свойства волновой функции достаточны для решения обратной задачи.

Зададим новую волновую функцию формулой

$$\tilde{\Psi}(k, x) = \begin{cases} \dfrac{\Psi(k, x)}{a(k)} & \text{при} \quad \mathrm{Im}\, k > 0 \\ \\ \Psi(k, x) & \text{при} \quad \mathrm{Im}\, k < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Она обладает следующими свойствами

1. При любом фиксированном x $\tilde{\Psi}(k, x)$ – мероморфная при $\mathrm{Im}\, k \neq 0$ функция комплексной переменной k. В области $\mathrm{Im}\, k \neq 0$ она не имеет других особенностей кроме простых полюсов в точках $i\kappa_j = i\sqrt{-E_j}$, где E_j – точки дискретного спектра.

2. При $|k| \to \infty$ имеет место асимптотика $\tilde{\Psi}(k, x) = (1 + o(1))e^{ikx}$.

3. На вещественной прямой $\mathrm{Im}\, k = 0$ функция $\tilde{\Psi}(k, x)$ имеет разрыв первого рода и ее граничные значения $\tilde{\Psi}_\pm(k, x) = \tilde{\Psi}(k \pm i0, x)$ тождественно по x связаны соотношением

$$\tilde{\Psi}_+(k, x) = \tilde{\Psi}_-(k, x) + r(k)\tilde{\Psi}_-(-k, x), \tag{6}$$

   где $r(k)$ – коэффициент отражения.

4. Если $i\kappa_j$ – полюс функции $\tilde{\Psi}(k,x)$, то имеет место соотношение
$$\operatorname{res}\tilde{\Psi}(k,x)\Big|_{k=i\kappa_j} = \tilde{b}_j\tilde{\Psi}(-i\kappa_j,x) \tag{7}$$
где
$$\tilde{b}_j = \frac{b_j}{a'(i\kappa_j)}. \tag{8}$$

Мы решаем следующую задачу. Пусть заданы следующие данные рассеяния

1. Комплекснозначная функция вещественного аргумента $r(k)$ такая, что
   (a) $|r(k)| \le 1$.
   (b) $r(-k) = \bar{r}(k)$.
   (c) $r(k) \to 0$ достаточно быстро при $|k| \to \infty$.
2. Набор положительных чисел $\kappa_1 < \kappa_2 < \ldots < \kappa_N$.
3. Набор чисто мнимых чисел $\tilde{b}_j$, $j = 1, \ldots, N$ таких, что $\frac{\tilde{b}_j}{i} > 0$.

Тогда по этим данным нужно построить функцию $\tilde{\Psi}(k,x)$, обладающую перечисленными выше свойствами, и доказать, что она является собственной функцией одномерного стационарного оператора Шредингера с некоторым потенциалом $u(x)$.

Оказывается, что перечисленные выше свойства полностью определяют $\tilde{\Psi}(k,x)$. Построение $\tilde{\Psi}(k,x)$ сводится к решению некоторого сингулярного интегрального уравнения. Выведем его.

Напомним постановку задачи Римана о факторизации. Пусть Γ – некоторый несамопересекающийся замкнутый контур на комплексной плоскости, $\phi(z)$ – некоторая непрерывная функция на Γ. (Мы будем считать как контур, так и функцию достаточно хорошими, чтобы не вдаваться в технические детали). Задача Римана состоит в нахождении пары функций $\Psi_+(z)$ и $\Psi_-(z)$ таких, что $\Psi_+(z)$ голоморфна внутри области, ограниченной Γ, $\Psi_-(z)$ голоморфна вне этой области и на Γ граничные значения связаны соотношением
$$\phi(z) = \Psi_+(z) - \Psi_-(z). \tag{9}$$

По теореме Лиувилля об ограниченной голоморфной функции решение задачи Римана о факторизации единственно с точностью до прибавления к обеим функциям произвольной константы. Его можно отнормировать полагая решение равным 0 в точке ∞.

Теорема 1 *Решение задачи Римана о факторизации дается формулой Коши*

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\phi(w)dw}{w - z}. \tag{10}$$

Мы не будем доказывать ее здесь. Фактически, это одна из формулировок известной теоремы Племеля-Сохоцкого. Нам понадобится частный случай этой теоремы, когда Γ – вещественная прямая (в этом случае чтобы гарантировать сходимость интегралов мы будем требовать, чтобы выполнялось $\phi(z) = O(1/|z|^{1+\epsilon})$.

Замечание 1 *В случае, когда Γ – вещественная прямая, формула (10) эквивалентна следующему соотношению*

$$\frac{1}{w - z - i0} - \frac{1}{w - z + i0} = 2\pi i \delta(z - w). \tag{11}$$

Другой способ решения задачи Римана о факторизации на вещественной прямой, (который нам также понадобится в дальнейшем), состоит в следующем. Представим $\phi(z)$, $z \in R$ в виде интеграла Фурье

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(k) e^{ikz} dz. \tag{12}$$

Пусть

$$\Phi_+(z) = \int_{0}^{\infty} \tilde{\phi}(k) e^{ikz} dz, \quad \Phi_-(z) = - \int_{-\infty}^{0} \tilde{\phi}(k) e^{ikz}. \tag{13}$$

Очевидно, что

$$\phi(z) = \Psi_+(z) - \Psi_-(z), \tag{14}$$

и функции $\Psi_+(z)$, $\Psi_-(z)$ аналитически продолжаются в верхнюю и нижнюю полуплоскость соответственно. Из сказанного выше следует, что операторы $\phi(x) \to \Psi_+(x)$, $\phi(x) \to \Psi_-(x)$ являются ортогональными проекторами в $L^2(R)$. Тем самым, их норма в $L^2(R)$ равна 1.

Пусть

$$\tilde{\Psi}(k,x) = e^{ikx}\chi(k,x), \quad \hat{r}(k,x) = e^{-2ikx}r(k), \quad \hat{b}_j(x) = e^{2\kappa_j x}\tilde{b}_j. \tag{15}$$

Соотношения (6), (7) в терминах $\chi(k,x)$ приобретают следующий вид:

$$\chi(k+i0,x) = \chi(k-i0,x) + \hat{r}(k,x)\chi(-k-i0,x), \quad k \in R \tag{16}$$

$$\operatorname{res}\chi(k,x)|_{k=i\kappa_j} = \hat{b}_j(x)\chi(-i\kappa_j,x) \tag{17}$$

Применяя обсуждавшуюся выше формулу Коши, учитывая, что $\chi(k,x)$ не имеет других особенностей по k, кроме простых полюсов в точках $i\kappa_j$ и разрыва на вещественной оси, а также, пользуясь тем, что

$$\chi(k,x) \to 1 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{18}$$

получаем:

$$\chi(k,x) = 1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\Gamma_j(x)}{k - i\kappa_j} + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_R \frac{\hat{r}(l,x)\chi(-l-i0,x)dl}{l-k}, \tag{19}$$

где $\Gamma_j(x)$ – пока что неизвестные функции.

Из (19) следует, что

$$\chi(k-i0,x) = 1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\Gamma_j(x)}{k - i\kappa_j} + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_R \frac{\hat{r}(l,x)\chi(-l-i0,x)dl}{l-k+i0}, \quad k \in R. \tag{20}$$

Из (17) следует, что

$$\Gamma_j(x) = \hat{b}_j(x)\left[1 + \sum_{m=1}^{N} \frac{\Gamma_m(x)}{-i\kappa_j - i\kappa_m} + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_R \frac{\hat{r}(l,x)\chi(-l-i0,x)dl}{l+i\kappa_j}\right]. \tag{21}$$

Уравнения (20), (21) - это и есть уравнения обратной задачи рассеяния. Если дискретный спектр отсутствует, то однозначная разрешимость (20) вытекает из того, что норма интегрального оператора в правой части меньше 1.

Вернемся к исследованию уравнения KdV. Предположим, что потенциал $u(x)$ зависит от дополнительного параметра t и удовлетворяет уравнению KdV. Вычислим t – динамику данных рассеяния.

Напомним сперва несложную алгебраическую лемму

Упражнение 1 *Пусть A, B – пара коммутирующих матриц $AB = BA$, A – диагональная матрица, причем на диагонали стоит n_1 раз число λ_1, затем стоит n_2 раза число λ_2 и так далее, и все λ_j предполагаются попарно различными.*

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Тогда B имеет блочно-диагональный вид

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & B_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & B_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{23}$$

где блоки B_1, B_2, $\dots$ имеют размер $n_1 \times n_1$, $n_2 \times n_2$, $\dots$ соответственно.

При каждом E уравнение

$$(-\partial_x^2 + u(x))\Psi(x) = E\Psi(x) \tag{24}$$

имеет двумерное пространство решений с базисом $\Psi_1(k,x)$, $\Psi_1(-k,x)$, $E = k^2$. Поскольку уравнение KdV эквивалентно коммутативности пары операторов L и $\partial_t - A$, где

$$A = \partial_x^3 - \frac{3}{2}u(x,t)\partial_x - \frac{3}{4}u(x,t)_x, \tag{25}$$

то указанное пространство решений инвариантно относительно действия оператора $\partial_t - A$, т.е.

$$(\partial_t - A)\Psi_1(k,x) = \alpha_1(k)\Psi_1(k,x) + \alpha_2(k)\Psi_1(-k,x). \tag{26}$$

Найдем константы $\alpha_1(k)$, $\alpha_2(k)$. Для этого устремим $x \to +\infty$, и, пользуясь тем, что

$$\Psi_1(k,x) = e^{ikx} + o(1), \quad u(x,t) \to 0, \quad A \to \partial_x^3 \ \text{ при } \ x \to +\infty, \tag{27}$$

получаем

$$\alpha_1(k) = ik^3, \quad \alpha_2(k) = 0, \tag{28}$$

т.е.

$$(\partial_t - A)\Psi_1(k,x) = ik^3\Psi_1(k,x). \tag{29}$$

Равенство (29) оказывается ключевым для вычисления динамики данных рассеяния в силу KdV.