Лекция 7.

18 сентября 1999 г.

Следующие две лекции будут посвящены периодической задаче для KdV.

Пусть
$$L = -\partial_x^2 + u(x), \quad u(x+1) = u(x) \tag{1}$$
– одномерный оператор Шредингера с вещественным гладким периодическим потенциалом (для простоты будем считать, что период равен 1).

Напомним несколько основных фактов из спектральной теории L. Рассмотрим уравнение
$$L\Psi(x) = E\Psi(x). \tag{2}$$

Спектр задачи (2) в пространстве $L^2(\mathbf{R}^1)$ совпадает с множеством тех E, при которых уравнение (2) имеет хотя бы одно не быстрее, чем полиномиально растущее решение.

(2) – обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, поэтому при всех E его пространство решений двумерно. В частности, в нем можно зафиксировать базис решений $\Psi_1(E,x)$, $\Psi_2(E,x)$, полагая
$$\begin{array}{c} \Psi_1(E,0) = 1 \\ \Psi_1'(E,0) = 0 \\ \Psi_2(E,0) = 0 \\ \Psi_2'(E,0) = 1 \end{array} \tag{3}$$

Пусть $\psi(x)$ – произвольное решение уравнения (2). Поскольку потенциал $u(x)$ периодичен с периодом 1, то функция $\psi(x+1)$ – также удовлетворяет уравнению (2). В частности, $\Psi_1(E,x+1)$, $\Psi_2(E,x+1)$ оказываются линейными комбинациями базисных функций
$$\begin{array}{c} \Psi_1(E,x+1) = t_{11}(E)\Psi_1(E,x) + t_{12}(E)\Psi_2(E,x) \\ \Psi_2(E,x+1) = t_{21}(E)\Psi_1(E,x) + t_{22}(E)\Psi_2(E,x). \end{array} \tag{4}$$

(Функции $t_{jk}(E)$ конечно же различны для различных потенциалов). Матрица
$$\hat{T}(E) = \begin{pmatrix} t_{11}(E) & t_{12}(E) \\ t_{21}(E) & t_{22}(E) \end{pmatrix} \tag{5}$$
называется матрицей монодромии. Несложно проверяется, что

Теорема 1 *1. В базисе (3) матрица $\hat{T}(E)$ – целая функция переменной E.*

2. При всех E $\det \hat{T}(E) \equiv 1$ (теорема о вронскиане).

3. При вещественных E матрица $\hat{T}(E)$ вещественна в базисе (3), и, следовательно, $\operatorname{trace} \hat{T}(E)$ вещественнен при вещественных E.

Определение 1 *Решение уравнения (2) $\Psi(E, x)$ называется блоховским решением или блоховской волновой функцией, если оно является одновременно является и собственной функцией оператора монодромии*

$$\Psi(E, x+1) = \kappa(E)\Psi_(E, x). \tag{6}$$

Собственные числа матрицы $\hat{T}(E)$ $\kappa_1(E)$, $\kappa_2(E)$ являются решениями квадратного уравнения

$$\kappa^2(E) - \operatorname{trace} \hat{T}(E)\kappa(E) + 1 = 0 \tag{7}$$

и по теореме Виета

$$\kappa_1(E) + \kappa_2(E) = \operatorname{trace} \hat{T}(E), \quad \kappa_1(E)\kappa_2(E) \equiv 1. \tag{8}$$

Тем самым, возможны 3 варианта

1. $|\kappa_1(E)| \neq 1$. Тогда собственные числа попарно различны, блоховские функции образуют полный базис в простанстве решенией, любое решение экспоненциально растет хотя бы в одну сторону и E – не точка спектра.

2. $|\kappa_1(E)| = 1$, но $\kappa_1(E) \neq \pm 1$. Тогда собственные числа попарно различны, блоховские функции образуют полный базис в пространстве решенией, оба блоховских решения, а, следовательно и все решения ограничены при всех x и E – точка непрерывного спектра (дискретного спектра в этой задаче не бывает). При этом $\kappa_2(E) = \overline{\kappa_1(E)}$, и, следовательно $\operatorname{trace} \hat{T}(E)$ – вещественная функция, по модулю меньшая 2.

3. $\kappa_1(E) \neq \pm 1$. В этом случае $\kappa_2(E) = \kappa_1(E)$, $\operatorname{trace} \hat{T}(E) = \pm 2$, E – точка непрерывного спектра, и по крайней мере одно из решений ограничено при всех x. В этой ситуации возможны два варианта

- Матрица $\hat{T}(E)$ приводится к жорданову виду. В этом случае решения общего положения линейно растут на бесконечности.
- $\hat{T}(E) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. В этом случае все волновые функции ограничены.

В теории периодического оператора Шредингера хорошо известно, что спектр в $L^2(\mathbf{R}^1)$ дает примерно "половину" информации о потенциале (фактически мы докажем это позднее). Поэтому необходимо одновременно с задачей в $L^2(\mathbf{R}^1)$ рассматривать и задачу Дирихле

$$L\Psi(x) = E\Psi(x), \quad \Psi(0) = \Psi(1) = 0. \tag{9}$$

Спектр этой задачи чисто дискретен и однократен. Если бы кратность в какой-нибудь точке была равна 2, то это означало бы, что все решения уравнения Шредингера обращаются в 0 при $x = 0$, что невозможно.

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 2 *1. Спектр обеих задач целиком лежит на вещественной оси* $\operatorname{Im} E = 0$.

2. Если E_j – точка спектра задачи Дирихле, то собственные числа матрицы монодромии $\kappa_1(E_j)$, $\kappa_2(E_j)$ вещественны и либо они равны ± 1 и E_j лежит в спектре; либо одно из собственных чисел по модулю больше 1, а другое меньше, и E_j не лежит в спектре.

3. Если $\hat{T}(E_j) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то E_j – точка спектра задачи Дирихле.

Доказательство. Пусть $\Psi(x)$ – решение уравнения Шредингера с $E = E_0$, такое что:

- Либо $\Psi(x+1) = \kappa\Psi(x)$, $|\kappa| = 1$ ($\Psi(x)$ – ограниченная блоховская функция).
- Либо $\Psi(x+1) = \Psi(x) = 0$, ($\Psi(x)$ – решение задачи Дирихле).

Убедимся, что тогда $\operatorname{Im} E_0 = 0$. Для этого рассмотрим следующий интеграл

$$\int_0^1 (L\Psi(x))\overline{\Psi(x)}dx = E_0 \int_0^1 \Psi(x)\overline{\Psi(x)}dx. \qquad (10)$$

Поскольку $\Psi(x)\overline{\Psi(x)} \geq 0$

$$\int_0^1 \Psi(x)\overline{\Psi(x)}dx \neq 0. \qquad (11)$$

Интегрируя по частям и учитывая вещественность $u(x)$, получаем

$$\int_0^1 (L\Psi(x))\overline{\Psi(x)}dx = \int_0^1 (-\Psi''(x) + u(x)\Psi(x))\overline{\Psi(x)}dx =$$

$$= \int_0^1 (\Psi(x))(-\overline{\Psi''(x)} + u(x)\overline{\Psi(x)})dx + \Big|_0^1 (\Psi'(x)\overline{\Psi(x)} - \Psi(x)\overline{\Psi'(x)}). \qquad (12)$$

Если на границе выполнено либо условие блоховости с $|\kappa| = 1$ либо условие Дирихле, то граничные члены в интеграле исчезают и

$$E_0 \int_0^1 \Psi(x)\overline{\Psi(x)}dx = \int_0^1 (L\Psi(x))\overline{\Psi(x)}dx =$$

$$\int_0^1 \Psi(x)\overline{L\Psi(x)}dx = \overline{E}_0 \int_0^1 \Psi(x)\overline{\Psi(x)}dx, \qquad (13)$$

т.е.

$$E_0 = \overline{E_0}, \qquad (14)$$

что и доказывает первую часть теоремы.

Пусть теперь $\Psi(x)$ – собственная функция задачи Дирихле. Поскольку $\Psi(1) = \Psi(0) = 0$, то $\Psi'(1) = \kappa\Psi'(0)$ и, следовательно $\Psi(x+1) = \kappa\Psi(x)$, т.е. $\Psi(x)$ – блоховская функция. Поскольку уравнение (2) вещественно, то $\overline{\Psi(x)}$ – также решение задачи Дирихле, и если κ не вещественно, то они линейно независимы, т.е точка спектра задачи Дирихле двукратно вырождена, что невозможно.

Теорема доказана.

Фактически мы доказали также следующее утверждение:

Теорема 3 *Блоховские решения нигде не обращаются в 0 в области* $\operatorname{Im} E \neq 0$.

До настоящего момента мы нигде не фиксировали нормировку блоховских решений. Начиная с этого места (если явно не оговорено обратное) мы будем нормировать их условием

$$\Psi(E, 0) = 1, \tag{15}$$

или, что эквивалентно,

$$\Psi(E, x) = \frac{\tilde{\Psi}(E, x)}{\tilde{\Psi}(E, 0)}, \tag{16}$$

где $\tilde{\Psi}(E, 0)$ – блоховское решение с произвольной нормировкой. Эта нормировка неособа тогда и только тогда, когда $\tilde{\Psi}(E, 0)$ не есть решение задачи Дирихле.

Нахождение блоховских функций сводится к диагонализации 2×2 матрицы $\hat{T}(E)$, голоморфно зависящей от E. Ее собственные вектора и собственные значения оказываются мероморфными функциями на римановой поверхности, разветвтленно накрывающей E-плоскость, причем точки ветвления могут быть только в тех E, в которых $\hat{T}(E)$ имеет кратные собственные числа. Тем самым мы получили следующий результат:

Теорема 4 1. *Блоховские решения с нормировкой (15) мероморфны на римановой поверхности* Γ, *двулистно накрывающей* E*-плоскость и задаваемой уравнением*

$$\kappa^2(E) - \operatorname{trace} \hat{T}(E) \kappa(E) + 1 = 0, \tag{17}$$

все точки ветвления которой вещественны.

2. *Полюса этих решений* γ_j *лежат над вещественной осью* $\operatorname{Im} E = 0$ *над спектром задачи Дирихле, причем из однократности спектра задачи Дирихле следует, что полюс лежит ровно на одном из листов.*

Замечание 1 *В классической спектральной теории известно, что для восстановления потенциала $u(x)$ нужно знать спектр задачи на всей прямой, плюс спектр задачи Дирихле, плюс каждой из точек задачи Дирихле приписать знак либо +, либо -. Выбор знака в точности соответствует выбору листа, на котором лежит полюс блоховской функции.*

Тем самым, вся информация о римановой поверхности Γ (спектральной кривой) закодирована в поведении функции $\phi(E) = \operatorname{trace} \hat{T}(E)$ при вещественных E.

1. Если $|\phi(E)| > 2$, то собственные числа матрицы монодромии вещественны, отличны от 1 по модулю, точка E лежит вне спектра и не является точкой ветвления.

2. Если $|\phi(E)| < 2$, то собственные числа матрицы монодромии комплексны, равны 1 по модулю, точка E лежит в спектре и не является точкой ветвления

3. Если $|\phi(E)| = 2$, то собственные числа матрицы монодромии совпадают, равны ± 1, точка E лежит в спектре. Если $\phi(\tilde{E}) - \phi(E)$ имеет ноль нечетного порядка в E, то из (17) следует, что E – точка ветвления. Если $\phi(\tilde{E}) - \phi(E)$ имеет ноль четного порядка в E, то ветвления в E нет.

Нам понадобятся следующие свойства функции $\phi(E) = \operatorname{trace} \hat{T}(E)$ при вещественных E (мы приведем их без доказательства)

Теорема 5 *1. Существует число E_0 такое, что $\phi(E) > 2$ при $E < E_0$ $\phi(E) > 2$, т.е. спектр нашей задачи ограничен снизу.*

2. Если $|\phi(E)| < 2$, то $\phi'(E) \neq 0$.

3. Если $\phi'(E) = 0$, то $\phi(E)\phi''(E) < 0$.

Отсюда следует

Теорема 6 *1. Спектр задачи (2) в пространстве $L^2(\mathbf{R}^1)$ – это интервал $[E_0, +\infty)$, из которого выброшен набор открытых интервалов (лакун) (E_{2j-1}, E_{2j}) $j = 1, 2, \ldots$. Число лакун может быть как конечным, так и бесконечным. (Отметим , что концы лакун принадлежат спектру).*

2. Точка $E = \infty$, а также все концы лакун – точки ветвления спектральной кривой Γ (римановой поверхности блоховской функции). Других точек ветвления у Γ нет.

Из теоремы Штурма несложно выводится, что над каждым отрезком $[E_{2j-1}, E_{2j}]$, получающимся из лакуны добавлением к ней ее концов, лежит ровно одна точка спектра задачи Дирихле. Остальные точки спектра Дирихле лежат над точками спектра в $L^2(\mathbf{R}^1)$ такими, что $|\phi(E)| = 2$, и в них блоховская функция не имеет особенностей. Эти точки можно рассматривать как вырожденные лакуны и в теории Шредингера с вещественными коэффициентами ими можно принебречь (в других задачах, в частности для Шредингера с комплексным потенциалом, это уже не так).

Для потенциалов общего положения число точек ветвления Γ бесконечно. С.П.Новиков в 1974 году предложил особое внимание уделить потенециалам с конечным числом лакун (конечнозонным), для которых Γ – алгебраическая риманова поверхность и полностью работает аппарат алгебраической геометрии, позволяя получить явные формулы.

В этом случае блоховская функция $\Psi(\gamma, x)$ (мы будем писать γ вместо E, чтобы подчеркнуть, что блоховская функция определена не на E – плоскости, а на двулистным накрытием Γ над ней) обладает следующими свойствами

1. $\Psi(\gamma, x)$ мероморфна по γ на римановой поверхности Γ, двулистно накрывающей E-плоскость с точками ветвления ∞, $E_0 < E_1 < E_2 < \ldots < E_{2g}$. Число $g < \infty$ – род Γ.

2. $\Psi(\gamma, x)$ как функция γ имеет ровно g простых полюсов в точках $\gamma_1, \ldots \gamma_g$, не зависящих от x, причем точка γ_j лежит над отрезком $[E_{2j-1}, E_{2j}]$.

3. При $\gamma \to \infty$
$$\Psi(E, x) = e^{i\sqrt{E}x}(1 + o(1)). \tag{18}$$

Оказывается, что эти свойства уже полностью определяют функцию $\Psi(\gamma, x)$. Для того, чтобы убедиться в этом, воспользуемся следующим следствием из теоремы Римана-Роха (см., например книгу Спрингера):

Теорема 7 *Пусть $\gamma_1, \ldots \gamma_g$ – набор g точек общего положения на неособой компактной римановой поверхности Γ рода g. Тогда мероморфная функция $f(\gamma)$ на Γ, не имеющая других особенностей, кроме, возможно, простых полюсов в точках γ_j, автоматически является константой.*

Замечание 2 *Если $g = 0$, то Γ – сфера Римана, и мы получаем теорему Лиувилля об ограниченных голоморфных функциях на* $\mathbf{C}$.

Докажем единственность функции $\Psi(\gamma, x)$ с перечисленными выше свойствами. Поскольку приращение аргумента $\Psi(\gamma, x)$ при обходе вокруг ∞ равно 0, число нулей $\Psi(\gamma, x)$ с учетом их кратности равно числу полюсов, т.е. g. Пусть при каком-то $x = x_0$ существует другая фукция $\Psi_1(\gamma, x_0)$ переменной γ с перечисленными выше свойствами. Тогда

$$\frac{\Psi_1(\gamma, x_0)}{\Psi(\gamma, x_0)} \tag{19}$$

– мероморфная функция на Γ с не более, чем g простыми полюсами. По следствию из из теоремы Римана-Роха она константа, причем из асимптотики при $\gamma \to \infty$ видно, что эта константа равна 1. Это и доказывает единственность.

Замечание 3 *В теории одномерного Шредингера с вещественным потенциалом расположение точек $\gamma_1, \ldots \gamma_g$ таково, что предположение общности положения накладывать не обязательно. Мы не будем доказывать это здесь.*

Тем самым, для вычисления $\Psi(\gamma, x)$ достаточно найти хотя бы одну функцию с перечисленными выше свойствами, и по теореме единственности она будет решением. На следующей лекции мы явно предъявим ее в терминах θ-функции Римана многих переменных.