Лекция 8.

1 ноября 1999 г.

Перейдем к конечнозонной периодической обратной задаче. Пусть нам задан следующий набор спектральных данных:

1. Конечный набор вещественных точек $E_0 < E_1 < E_2 < \ldots < E_{2g}$, причем число их нечетно. Эти точки будут граничными точками спектра, и одновременно, конечными точками ветвления римановой поверхности блоховской функции.

2. Набор g точек γ_j на римановой поверхности Γ – двулистном накрытии E – плоскости с точками ветвления $E_0 < E_1 < E_2 < \ldots < E_{2g}$, ∞, такой, что точка γ_j лежит над отрезком $[E_{2j-1}, E_{2j}]$ (либо над j-ой лакуной, либо над ее концом). Отметим, что g – род Γ (см., например, книгу Спрингера).

Мы будем решать задачу построения функции $\Psi(\gamma, x)$ где γ – точка римановой поверхности Γ, x – вещественная переменная, со следующими аналитическими свойствами: Пусть x – некоторая фиксированая точка. Тогда:

1. $\Psi(\gamma, x)$ мероморфна по γ на римановой поверхности Γ.

2. $\Psi(\gamma, x)$ как функция γ имеет ровно g простых полюсов в точках $\gamma_1, \ldots \gamma_g$, (напомним, что по определению, γ_j не зависят от x).

3. При $\gamma \to \infty$
$$\Psi(E, x) = e^{i\sqrt{E}x}(1 + o(1)). \tag{1}$$

Как мы уже отмечали эти свойства полностью определяют функцию $\Psi(\gamma, x)$. Поэтому нам достаточно найти хотя бы одну функцию с описанными свойствами. Мы предъявим явную формулу для нее. Для начала опишем входящие в эту формулу ингредиенты.

1. Канонический базис замкнутых циклов на Γ a_j, b_j, $j = 1, \ldots, g$.

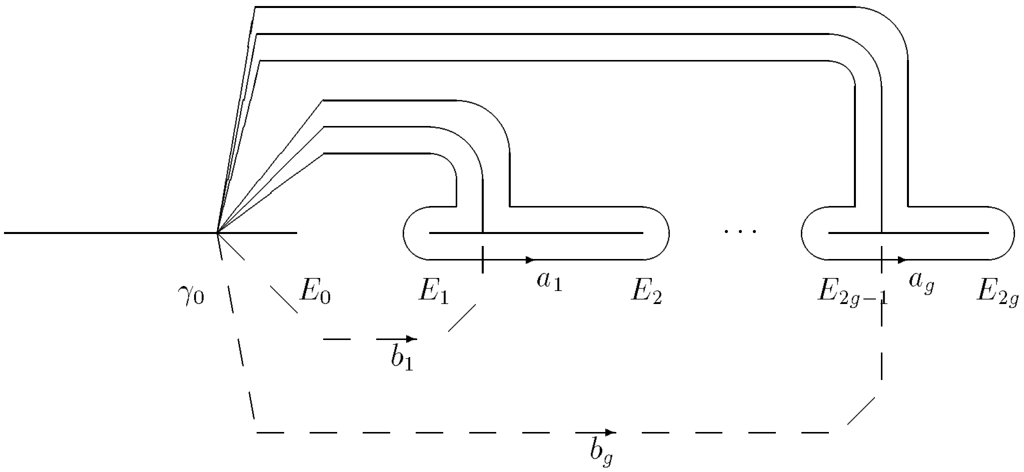

Рис. 1.

Известно (см., например, книгу Спрингера), что выбранный набор циклов независим и гомотопически любой цикл выражается в виде их линейной комбинации.

2. Голоморфные 1-формы (дифференциалы 1 рода, голоморфные дифференциалы). Это объекты, записываемые в локальных координатах как $\omega = f(\lambda)d\lambda$, где $f(\lambda)$ – голоморфная функция. На Γ все они задаются формулой

$$\omega = \frac{q(E)dE}{\sqrt{-4(E-E_0)\dots(E-E_{2g})}}, \tag{2}$$

где $q(E)$ –произвольный многочлен степени $g-1$. Поскольку пространство таких многочленов g-мерно, то g-мерно и пространство голоморфных дифференциалов в согласии с общей теорией.

Зафиксируем в этом пространстве канонический базис $\omega_1, \dots, \omega_g$, наложив следующий набор условий

$$\oint_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}. \tag{3}$$

3. Матрица Римана (B_{ij}) – матрица интегралов базисных дифференциалов по b-циклам

$$B_{ij} = \oint_{b_j} \omega_i. \tag{4}$$

Нам понадобятся следующие ее свойства (см., например, книгу Спрингера):

   (a) Матрица (B_{ij}) симметрична: $B_{ij} = B_{ji}$,

   (b) Мнимая часть матрицы Римана $\mathrm{Im}(B_{ij})$ положительно определена.

4. Отображение Абеля.

Зафиксируем точку γ_0 на кривой Γ. Отображением Абеля $\vec{A}(\gamma)$ называется многозначное отображение $\Gamma \to \mathbf{C}^g$, задаваемое формулой

$$(\vec{A}(\gamma))_k = \int_{\gamma_0}^{\gamma} \omega_k, \quad k = 1, \ldots, g. \tag{5}$$

Неединственность возникает из-за того, что путь, соединяющий γ_0 с γ определен неоднозначно, а именно с точностью до прибавления произвольной линейной комбинации a_j и b_j с целыми коэффициетами. Тем самым, вектор $A(\gamma)$ определен с точностью до прибавления произвольного целочисленного вектора и любой целочисленной комбинации столбцов матрицы Римана (B_{jk}). Поэтому естественно считать, что $A(\gamma)$ принимает значения не в $\mathbf{C}^g$, а в торе, получающемся факторизацией $\mathbf{C}^g$ по решетке, элементы которой – всевозможные суммы целочисленных векторов и линейных комбинаций столбцов матрицы Римана (B_{jk}) с целыми коэффициентами. Этот тор называется **якобианом** кривой Γ.

5. Тета-функция Римана.

Пусть B_{kj} произвольная комплексная симметричная $g \times g$ матрица такая, что $\mathrm{Im}\, B_{kj}$ положительно определена, $\vec{z}$ – произвольный комплексный g-компонентный вектор. Тета-функция Римана без характеристик определяется как сумма следующего ряда (тета-функции с характеристиками мы не будем обсуждать в нашем курсе):

$$\theta(\vec{z}|B_{kj}) = \sum_{m_1,\ldots,m_g} \exp\left\{\pi i \sum_{kj} B_{kj} m_k m_j + 2\pi i \sum_{k} z_k m_k\right\}, \qquad (6)$$

где целые числа m_l, $l = 1, \ldots, g$ пробегают все значения от $-\infty$ до ∞. (В некоторых книгах используется несколько иное определение тета-функци, отличающееся от нашего на множитель $2\pi i$ в обоих аргументах).

Ряд (6) сходится при всех $\vec{z} \in \mathbf{C}^g$. Одно из важнейших свойств тета-функции Римана — следующее свойство периодичности:

$$\theta(z_1, z_2, \ldots, z_l + 1, \ldots, z_g|B_{kj}) = \theta(z_1, z_2, \ldots, z_l, \ldots, z_g|B_{kj}). \qquad (7)$$

$$\theta(z_1 + B_{1l}, z_2 + B_{2l}, \ldots, z_g + B_{gl}|B_{kj}) = \theta(z_1, z_2, \ldots, z_g|B_{kj})e^{\{-\pi i B_{ll} - 2\pi i z_l\}}. \qquad (8)$$

Наболее важен случай, когда B_{kj} – матрица периодов алгебраичекой кривой (элементарный подсчет размерностей показывает, что для матрицы B_{kj} общего положения это не так). В этой ситуации нули тета-функции допускают следующее геометрическое описание (см. например, статью Дубровина):

Лемма 1 *Пусть $\vec{A}(\gamma)$ обозначает отображение Абеля точки γ. Тогда сущесвует g-мерный комплексный вектор $\vec{K} = \vec{K}(\Gamma, \gamma_0)$ (зависящий как от кривой так и от начальной точки отображения Абеля γ_0) такой, что при всех $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$, функция*

$$\varphi(\gamma) = \theta(\vec{A}(\gamma) - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K}|B_{kj}), \ \gamma \in \Gamma. \qquad (9)$$

(a) либо тождественно равна 0 по γ,

(b) либо имеет ровно g нулей по γ в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$.

$\vec{K}$ назывется **вектором римановых констант**.

Заметим, что функция $\theta(A(\gamma) - \vec{V})$ вообще-то многозначная функция. При обходе по a- циклам она однозначна, однако при обходе по b-циклам она умножается на экспоненту линейной функции от $\vec{z}$. Однако этот множитель неособ, везде отличен от нуля, поэтому нули $\theta(A(\gamma) - \vec{V})$ корректно определены.

6. Мероморфные дифференциалы Ω_1, Ω_3 с единственной особенностью в бесконечности

$$\Omega_1 = d(i\sqrt{E}) + \text{регулярная часть}, \tag{10}$$

$$\Omega_3 = d(-iE\sqrt{E}) + \text{регулярная часть}. \tag{11}$$

однозначино нормированные набором условий

$$\oint_{a_j} \Omega_1 = \oint_{a_j} \Omega_3 = 0, \quad j = 1, \ldots, g. \tag{12}$$

Вектора, составленные из их интегралов по b-циклам обозначим $\vec{U}$ и $\vec{W}$ соответственно.

$$U_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_j} \Omega_1, \quad W_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_j} \Omega_3. \tag{13}$$

Теперь у нас уже все готово к тому, чтобы выписать $\Psi(\gamma, x)$.
Для начала попробуем написать

$$\Psi(\gamma, x) = e^{x \int^{\gamma} \Omega_1} \tag{14}$$

Эта функция имеет правильную асимптотику на бесконечности, и однозначна при обходе по a-циклам, однако при обходе по циклам b_j она приобретает множители $2\pi i U_j$. Заметим, что эта неоднозначно похожа на неоднозначность функции $\theta(A(\gamma) - \vec{V})$, поэтому естественно попытаться скомпенсировать ее умножением на подходящую комбинацию функций вида $\theta(A(\gamma) - \vec{V})$. Действительно, рассмотрим функцию

$$\phi(\vec{z}) = \frac{\theta(\vec{z} - \vec{V}_1 | B_{kj})}{\theta(\vec{z} - \vec{V}_2 | B_{kj})}. \tag{15}$$

Из (7), (8) следует, что

$$\phi(z_1, z_2, \ldots, z_l + 1, \ldots, z_g) = \phi(z_1, z_2, \ldots, z_l, \ldots, z_g). \tag{16}$$

$$\phi(z_1 + B_{1l}, z_2 + B_{2l}, \ldots, z_g + B_{gl}) = \phi(z_1, z_2, \ldots, z_g) e^{-2\pi i ((V_1)_l - (V_2)_l)}. \tag{17}$$

Из формул (16), (17) видно, что функция

$$\Psi(\gamma, x) = \frac{\theta(x\vec{U} + \vec{A}(\gamma) - \vec{V})}{\theta(\vec{A}(\gamma) - \vec{V})} \cdot e^{x \int^{\gamma} \Omega_1} \tag{18}$$

уже однозначна на Г.

Следующий шаг – подбор константы $\vec{V}$ такой, чтобы нули знаменателя лежали в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$. Согласно Лемме 1 для этого достаточно положить

$$\vec{V} = \vec{A}(\gamma_1) + \ldots + \vec{A}(\gamma_g) + \vec{K}, \tag{19}$$

т.е.

$$\Psi(\gamma, x) = \frac{\theta(x\vec{U} + \vec{A}(\gamma) - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})}{\theta(\vec{A}(\gamma) - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})} \cdot e^{x \int^{\gamma} \Omega_1} \tag{20}$$

Эта функция уже почти такая, как надо. Единственное, что нужно подкорректировать – это убрать постоянный по γ множитель перед асимптотикой в бесконечности (этот множитель является фукцией x).

Для упрощения формул положим начальную точку преобразования Абеля γ_0 совпадающей с $E = \infty$ и выберем константу интегрирования так, чтобы имело место

$$\int^{\gamma} \Omega_k = i\sqrt{E} + o(1) \quad \text{при} \quad E \to \infty. \tag{21}$$

Тогда окончательно получаем

$$\Psi(\gamma, x) =$$

$$\frac{\theta(x\vec{U} + \vec{A}(\gamma) - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})\theta(-\vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})}{\theta(x\vec{U} - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})\theta(\vec{A}(\gamma) - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})} \cdot e^{x \int^{\gamma} \Omega_1} \tag{22}$$

Наконец – то мы вычислили $\Psi(\gamma, x)$!!!

Следующий шаг – вычисление потенциала $u(x)$.

Как было показано ранее, для этого нужно разложить $\Psi(\gamma, x)$ при больших E

$$\Psi(\gamma, x) = e^{ix\sqrt{E}}\left(1 + \frac{\chi_1(x)}{i\sqrt{E}} + O\left(\frac{1}{E}\right)\right) \tag{23}$$

и воспользоваться формулой

$$u(x) = 2\partial_x \chi_1(x). \tag{24}$$

В формуле (22) можно выделить три группы сомножителей. Во-первых, это θ-функции, не зависящие от x. Их вклад в $\chi_1(x)$ – некорая константа, не зависящая от x и при дифференциировании она зануляется. Во-вторых, из разложения по $1/\sqrt{E}$ интеграла в экспоненте выскаквает линейный по x член, который даст нам некоторую константу $C(\Gamma)$ в потенциале. Мы не будем уточнять ее. Остается сомножитель

$$h(\gamma, x) = \frac{\theta(x\vec{U} + \vec{A}(\gamma) - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})}{\theta(x\vec{U} - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})} \tag{25}$$

Воспользуемся следующей формулой для разложения преобразования Абеля вблизи точки $E = \infty$, вытекающей из билинейных соотношений Римана (см., например, книгу Спрингера)

$$\vec{A}(\gamma) = -\vec{U}\frac{1}{i\sqrt{E}} + O\left(\frac{1}{E}\right) \tag{26}$$

Отсюда

$$h(\gamma, x) = 1 - \left[\sum_{j=1}^{g} \frac{\theta'_j(x\vec{U} - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})}{\theta(x\vec{U} - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})} U_j\right] \frac{1}{i\sqrt{E}} + O\left(\frac{1}{E}\right), \tag{27}$$

т.е.

$$h(\gamma, x) = 1 - \left[\partial_x \ln \theta(x\vec{U} - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})\right] \frac{1}{i\sqrt{E}} + O\left(\frac{1}{E}\right), \tag{28}$$

$$\chi_1(x) = -\partial_x \ln \theta(x\vec{U} - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K}) + x \cdot \frac{C(\Gamma)}{2} + C_2(\Gamma), \tag{29}$$

и получаем

$$u(x) = -2\partial_x^2 \ln\theta(x\vec{U} - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K}) + C(\Gamma). \tag{30}$$

Формула (30) называется **формулой Итса-Матвеева**.

Теперь нам осталось построить соответствующие решения KdV. Для этого добавим в формулу (22) следующую зависимость от t:

$$\Psi(\gamma, x, t) =$$

$$\frac{\theta(x\vec{U} + t\vec{W} + \vec{A}(\gamma) - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})\theta(-\vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})}{\theta(x\vec{U} + t\vec{W} - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})\theta(\vec{A}(\gamma) - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})} \cdot \tag{31}$$

$$\cdot e^{x\int^{\gamma}\Omega_1 + t\int^{\gamma}\Omega_3}$$

Точно так же, как и ранее проверяется, что за исключением добавочного члена в асимптотике при $E \to \infty$ $\Psi(\gamma, x, t)$ имеет описанные выше аналитические свойства. Повторяя рассуждение Лекции 6 получаем, что при всех x, t $\Psi(\gamma, x, t)$ – собственная функция пары операторов L и $\partial_t - A$, что в свою очередь эквивалентно их коммутативности, т.е. $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению KdV.

Мы пришли к следующей формуле (формула Итса-Матвеева) для конечнозонных решений KdV:

$$u(x) = -2\partial_x^2 \ln\theta(x\vec{U} + t\vec{W} - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K}) + C(\Gamma). \tag{32}$$