Приходя на экзамен, необходимо иметь письменные решения трех задач (по одной из каждой группы, обозначенной римскими цифрами I, II, III). На экзамене будут даны еще задачи из предложенного списка (возможно чуть-чуть расширенного).

Задачи

к экзамену по курсу "Геометрия пространств мероморфных функций"
лектор С. К. Ландо

8/ix/99.

15/ix/99.

Задача 1. Докажите, что действие группы $S_{\mu+1}$ на плоскости $\sum \xi_i = 0$ перестановками координат порождено отражениями.

Задача 2. (I) Сформулируйте и докажите теорему Ляшко–Лойенги для а) двух б) трех полюсов на сфере.

22/ix/99.

Задача 3. (I) Найдите якобиан отображения $LL\colon \mathcal{P} \to D$ и докажите, что он не обращается в нуль вне Σ_H.

Задача 4. (I) Кратность отображения ЛЛ для многочленов степени $\mu + 1$ решает задачу перечисления деревьев с μ помеченными ребрами. Как перейти от деревьев с помеченными ребрами к деревьям с помеченными вершинами и вывести отсюда теорему Кэли?

29/ix/99.

Задача 5. (I) Докажите, что $\mathrm{LL}(Q(X)/R(X)) = \mathrm{discr}_x(Q(x) - tR(x))$.

Задача 6. (I) Докажите, что старший коэффициент многочлена – образа рациональной функции $\{x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + c + bx^{-1}\}$ при отображении ЛЛ – константа.

Задача 7. (I) Найти отображение ЛЛ на пространстве рациональных функций $\{x + c + b_1x^{-1} + b_2x^{-2}\}$ и проверить, что старший коэффициент многочлена-образа не константа.

13/x/99.

20/x/99.

Задача 8. (II) Опишите а) $\overline{M}_{0,5}$; б) $\overline{M}_{1,1}$. (Описание должно быть пригодно для работы с указанным многообразием, например, для вычисления его (ко)гомологий.)

Задача 9. (II) Перечислите различные комбинаторные типы кривых из а) $\overline{M}_{0,5}$; б) $\overline{M}_{1,3}$; в) $\overline{M}_{2,2}$.

Задача 10. (II) Пусть $n = 0$, $g \geq 2$, стабильная кривая имеет $3g-3$ узла. Тогда все компоненты кривой рациональны и имеют 3 точки пересечения с другими компонентами.

Задача 11. (II) Верно ли, что стабильная кривая рода g имеет не более чем $84(g-1)$ автоморфизмов?

Задача 12. (II) Найдите размерность пространства гиперэллиптических функций на (гладких или стабильных) кривых рода g.

27/x/99.

Задача 13. (II) Доказать, что на стабильной кривой рода g пространство таких мероморфных 1-форм, что в двойных точках они имеют полюс не выше первого порядка и сумма вычетов в каждой такой точке равна нулю, а другие полюса отсутствуют, g-мерно.

Задача 14. (II) Рассмотрим эллиптическую кривую со склеенными точками p и q. К какой стабильной кривой стремится такая кривая при $p \to q$?

Задача 15. (II) Рассмотрим семейство плоских эллиптических кривых $y^2 = x^3 - tx$, зависящее от параметра t. К какой стабильной кривой стремятся кривые этого семейства при $t \to 0$?

Задача 16. (II) Рассмотрим семейство кривых $xy(x+y-t) = 0$, зависящее от параметра t. Чему равен род кривых этого семейства? К какой стабильной кривой стремятся кривые этого семейства при $t \to 0$?

3/xi/99.

Задача 17. (II) Докажите формулу для индексов пересечения на кривых рода 1:

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,n}} \frac{1-\lambda_1}{(1-k_1\psi_1)\dots(1-k_n\psi_n)} = \frac{1}{24}(e_1^n - \sum_{i=2}^{n} e_i e_1^{n-i} - e_1^{n-1}),$$

где λ_1 — 1-й класс Черна расслоения голоморфных 1-форм; ψ_i, $i = 1, \dots, n$ — 1-й класс Черна расслоения кокасательных прямых в i-ой отмеченной точке кривой; e_i, $i = 1, \dots, n$ — iая элементарная симметрическая функция от $k_1, \dots, k_n$.

Задача 18. (II) Докажите формулу $< \tau_{m_1} \dots \tau_{m_n} >_0 = \frac{(n-3)!}{m_1! \dots m_n!}$.

10/xi/99.

17/xi/99.

Задача 19. (I) Подсчитайте кратность отображения LL на каустике и страте Максвелла для мероморфных функций на сфере с двумя полюсами.

24/xi/99.

Задача 20. (III) Проверьте, что фробениусово умножение в касательном расслоении к пространству многочленов опеределено корректно, и докажите, что оно совпадает с умножением в (мульти)локальном кольце.

1/xii/99.

8/xii/99.

Задача 21. (III) Укажите накрытия пространств Гурвица стандартными версальными деформациями особенностей E_6, E_7, E_8 и введите структуру фробениусовых многообразий на этих пространствах версальных деформаций.