Торические многообразия

Иван Аржанцев

курс проведен в осеннем семестре 1999 года

Задачи

1. Найти критерий квазиаффинности торического многообразия в терминах веера.

2. Привести пример ненормального аффинного многообразия, нормализация которого не является гладкой.

3. Пусть $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ – конус, не являющийся конусом максимальной размерности. Доказать, что $X(\sigma) = T_1 \times X(\sigma_1)$, где $X(\sigma_1)$ – торическое многообразие меньшей размерности.

4. Пусть действие $T^2 : \mathbb{C}^4$ определено формулами $t * e_1 = (t_1 t_2) e_1,\ t * e_2 = t_1^{-3} t_2^2 e_2,\ t * e_3 = t_1^2 t_2^{-1} e_3,\ t * e_4 = t_1^{-1} t_2^{-3} e_4$, и пусть $A = \mathbb{C}[\mathbb{C}^4]^{T^2}$ – алгебра инвариантов. Найти в A систему параметров и образующие A как модуля над "системой параметров".

5. Пусть σ – конус, натянутый на вектора $(1,0)$ и $(1,3)$. Положим степень монома $x_1^{i_1} x_2^{i_2}$ равной $i_1 + i_2 \Rightarrow$ градуировка на $k[x_1, x_2] \Rightarrow$ градуировка на $k[X(\sigma)]$. Написать ряд Пуанкаре для последней алгебры.

6. Верно ли, что в алгебре $k[X(\sigma)]$ можно выбрать систему параметров из мономов тогда и только тогда, когда конус σ симплициален?

7. Описать все радикальные и простые T-инвариантные идеалы в алгебре $k[X(\sigma)]$.

8. Доказать, что на алгебраическом многообразии пересечение двух аффинных открытых подмножеств аффинно.

9. Пусть Δ – симплициальный веер, $X(\Delta)$ – соответствующее торическое многообразие. Доказать, что для любого $x \in X(\Delta)$ найдется окрестность U_x и конечная абелева группа G, такие что $U_x \cong \mathbb{C}^n/G$.

10. Привести пример бесконечного кольца нормирования (не являющегося полем), которое не является кольцом дискретного нормирования.

11. Описать гладкую полную торическую поверхность, отвечающую последовательности $\{0, 2, 1, 3, 1, 3, 1, 1\}$.

12. Описать разрешение особенностей аффинной торической поверхности $X(\sigma)$, $\sigma =< (1, 7), (2, -3) >$.

13. Пусть Δ – веер в $N_{\mathbb{R}}$ (полный), натянутый на вектора $-e_1$, $-e_1 - e_2$, $-e_2$, $2e_1 + 3e_2$. Доказать, что для любой подрешетки $N' \subset N$ конечного индекса торическое многообразие $X(\Delta')$ (Δ' – тот же веер, но другая решетка) является особым.

14. а) $\sigma =< (2, -1), (-1, 2) >$. При каких условиях дивизор $a_1D_1 + a_2D_2$ является дивизором Картье?

    б) $\sigma =< e_1, e_2, e_3, e_1 - e_2 + e_3 >$. При каких условиях дивизор $a_1D_1 + a_2D_2 + a_3D_3 + a_4D_4$ является дивизором Картье?

15. Привести пример дивизора на торическом многообразии, никакая кратность которого не является дивизором Картье.

16. Доказать, что если веер Δ симплициален, то на $X(\Delta)$ каждый дивизор Вейля есть Q-дивизор Картье, т. е. некоторая его кратность есть дивизор Картье.

17. Доказать, что

    1) D - очень обилен $\Leftrightarrow$ ψ_D - строго выпукла + условие на полугруппу;

    2) D - обилен $\Leftrightarrow$ ψ_D - строго выпукла.

18. Привести пример обильного, но не очень обильного дивизора.

19. Пусть $\mathbb{F}_n$ – поверхность Хирцебруха, соответствующий веер в $\mathbb{R}^2$ порожден векторами $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$, $v_3 = -e_1 + ne_2$, $v_4 = -e_2$. Доказать, что $D = a_1D_1 + a_2D_2 + a_3D_3 + a_4D_4$ порождается глобальными сечениями $\Leftrightarrow$ $a_2 + a_4 \geq 0$, $a_1 + a_3 \geq na_1$. Доказать, что $Pic(X)$ свободно порождена $A = D_1$ и $B = D_4$ и что $aA + bB$ обилен $\Leftrightarrow$ $a > 0$ и $b > 0$.

20. Пусть $M = \mathbb{Z}^3$, многогранник P натянут на

$$(0,0,0),\ (0,1,1),\ (0,0,1),\ (1,0,0),\ (1,1,0).$$

Найти веер Δ_P. Доказать, что D_P очень обилен, задает вложение $X_P \subset \mathbb{P}^4$, и образ есть конус над квадратичной гиперповерхностью, заданной уравнением $T_1T_4 = T_2T_3$.