1. Хелемский А.Я. Плоские модули и гармонический анализ на группах

16 ноября 2000, Александр Яковлевич Хелемский[1]

Мне предложили рассказать на семинаре «Глобус» о науке, которой я занимаюсь. Эта наука выспренно называется *гомологическая теория алгебр анализа*. На Западе её большей частью называют *топологическая гомология*, подразумевая, что гомологии сугубо топологические. Как такую вещь рассказывать? Наука разрослась. За полтора часа не расскажешь и её малой части. Поэтому я предлагаю пойти по такому пути. Нужно взять какой-то свежий результат (я возьму самый свежий). Сформулировать, потом объяснить ингредиенты. И ещё объяснить идею доказательства в самых общих чертах. По ходу дела, если результат синтетический, многое нужно будет рассказать, и всё это вместе, возможно, какое-то впечатление даст.

Результат, о котором я расскажу, будет опубликован в совместной работе трёх авторов: Dales, Ghahramani и я. Он таков.

Теорема 1.1. *Если G — непрерывная (т.е. не дискретная) локально компактная группа, то её алгебра мер $M(G)$ не аменабельна.*

Здесь есть два ключевых слова, которые потребуют объяснения. Во-первых, что такое «алгебра мер», а во-вторых, что такое «аменабельность» банаховой алгебры, каковой эта алгебра мер является. Но сразу же я продолжу. В объединении с давно известным, классическим в данной проблематике, результатом Барри Джонсона, о котором ещё будет много слов сказано ниже, отсюда получается автоматическое следствие, которое позволяет уже для любых локально компактных групп дать полное описание того, когда алгебра мер аменабельна.

Следствие. *Пусть G — произвольная локально компактная группа. Тогда её алгебра мер $M(G)$ аменабельна тогда и только тогда, когда G дискретна и аменабельна в классическом теоретико-групповом смысле, идущем от фон Нойманна (т.е.аменабельна как дискретная группа).*

У аменабельности в теоретико-групповом смысле есть много разных эквивалентных определений. Проще всего можно сказать так. Дискретная группа G *аменабельна*, если на ней существует конечная аддитивная мера (нетривиальная и определённая на всех подмножествах), которая инвариантна относительно сдвигов. Здесь достаточно инвариантности относительно левых сдвигов, потому что тогда будет инвариантность и относительно правых сдвигов.

Когда-то то, что такой меры не существует на группе вращений (дискретной) было объяснением фон Нойманном парадокса Банаха–Тарского. Но если говорить ещё и об этом, то я ничего не успею.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Научно-Технической Программы сотрудничества между Россией и Грецией, обеспеченной Генеральным Секретариатом Научно-Технических Исследований в Греции (грант 70/3/4970, Афинский Университет).

Теперь я начинаю объяснять ингредиенты.

Алгебра мер

Пусть G — локально компактная группа. В алгебре, насколько мне известно, есть только одна конструкция групповой алгебры группы. Это линейные комбинации элементов группы с коэффициентами из какого-то поля. Групповые алгебры одной и той же группы отличаются только тем, какие берутся поля. Для банаховых алгебр поле только одно — поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Но существует довольно много разных конструкций, которые исходя из локально компактной группы делают банахову алгебру. Они обслуживают разные вещи, и трудно сказать, какая из них лучше. Но две из них выделяются по своей важности. Это самая старая по времени алгебра $L^1(G)$, которую когда-то ввёл Ирвинг Сигал. Она состоит из функций на G, интегрируемых по мере Хаара. (Значит, её определение зависит от этого глубокого понятия — меры Хаара, поэтому оно не столь просто.) Групповая операция — обычная свёртка. Но есть ещё и другая банахова алгебра — алгебра мер $M(G)$, которая как раз и есть предмет нашего разговора. Определяется она гораздо проще (не требует меры Хаара), но устроена она гораздо сложнее и изучена гораздо хуже. Её элементы — конечные комплексные регулярные борелевские меры на G. Что такое «регулярные», я подробно объяснять не буду; это означает, что они хорошо согласованы с топологией. Измеримые множества аппроксимируются изнутри компактными, а сверху открытыми. Важно, что мера конечная. Это — линейное пространство. Оно является банаховым, если нормой меры объявить вариацию, т.е. $\|\mu\| := \mathrm{Var}\,\mu$. И главное, в этом банаховом пространстве можно ввести операцию, относительно которой оно является банаховой алгеброй. Эта операция тоже называется свёрткой. Пусть есть две борелевские меры μ и ν. Что такое свёртка мер как мера? Мне нужно объяснить, что такое $\mu * \nu$ от множества E. Свёртка определяется так:

$$\mu * \nu(E) = \int_G \int_G \chi_E(st)\, d\mu(s)\, d\nu(t) = \int_G \nu(s^{-1}E)\, d\mu(s).$$

Здесь χ_E — характеристическая функция множества E, т.е. $\chi_E(st) = 1$, если $st \in E$, и $\chi_E(st) = 0$, если $st \notin E$.

В этой алгебре есть несколько замечательных двусторонних идеалов. Один из них состоит из абсолютно непрерывных по мере Хаара функций. (Теперь включается мера Хаара.) Он отождествляется как раз с $L^1(G)$. Сейчас речь идёт о случае, когда группа непрерывна. Когда группа дискретна, всё упрощается; об этом я скажу позже.

Но для нас сейчас более интересен другой замкнутый двусторонний идеал $M_c(G)$, который состоит из так называемых непрерывных мер (т.е. мер, которые в отдельных точках равны нулю):

$$L^1(G) \subset M_c(G) \subset M(G).$$

Идеал $M_c(G)$ как линейное пространство имеет банахово дополнение, более того, это банахово дополнение является банаховой алгеброй, т.е. банахова алгебра $M(G)$ представима (как линейное пространство) в виде прямой суммы банаховых алгебр: $M(G) = M_c(G) \oplus l_1(G)$. Подалгебра $l_1(G)$ состоит из так называемых дискретных мер. Дискретные меры — это пределы линейных комбинаций мер Дирака. Кстати сказать, алгебра $M(G)$, в отличие от алгебры $L^1(G)$, обладает единицей. Единица алгебры $M(G)$ — это мера Дирака, сосредоточенная в единице группы. А если взять разные меры Дирака и замкнуть их линейные комбинации, то получим банахово пространство $l_1(G)$.

Тот факт, что идеал $M_c(G)$ дополняем, — это наше чеховское ружьё, которое выстрелит в последнем акте.

Если группа G дискретна, то $M_c(G)$ пропадает, и остаётся $M(G) = l_1(G)$.

Для понятия аменабельности есть много эквивалентных подходов, но основных подходов два. Я сейчас изложу более традиционный и старый по времени подход, до сих пор наиболее распространённый на Западе. Этот подход основан на так называемых дифференцированиях. Второй подход основан на плоских модулях. Как раз он и участвовал в доказательстве этой теоремы. О нём речь пойдёт позже.

Вообще, мой доклад делится на три части. Первая часть называется «На Западе». Она как раз сейчас начинается. Вторая часть будет называться «На Востоке». И третья часть будет «Синтез».

1.1. На Западе

Пусть A — банахова алгебра, X — двусторонний банахов модуль над A (бимодуль, как говорят). Это означает, что X — бимодуль в чисто алгебраическом смысле, но ещё он — банахово пространство, и обе операции внешнего умножения непрерывны. *Дифференцированием* A со значениями в X называется непрерывный линейный оператор $D : A \to X$, который удовлетворяет тождеству Лейбница $D(ab) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b$. Если зафиксировать элемент $x \in X$ и рассмотреть оператор $D_x : a \mapsto a \cdot x - x \cdot a$, то, как легко проверить, этот оператор будет дифференцированием. Такое дифференцирование называется *внутренним*. Типичная задача в теории банаховых алгебр состоит в следующем. Заданы банахова алгебра A и бимодуль X. Верно ли, что любое дифференцирование из A в X является внутренним? По-настоящему интересными считаются как раз не внутренние дифференцирования, называемые *внешними*.

Одна из мотиваций того, почему этот вопрос интересен, состоит в следующем. Исторически всё начиналось со случая $X = A$, т.е. с дифференцирований алгебры. В анализе такие дифференцирования давали инфинитезимальный вариант автоморфизмов, потому что если D — дифференцирование, то e^D — автоморфизм алгебры. А внутреннее дифференцирование по такому правилу даёт внутренний автоморфизм, который действует сопряжением. Причём это верно более или менее в обе стороны, потому что если заданный внутренний автоморфизм близок к единичному, то он обязательно имеет вид e^D, где D — внутреннее дифференцирование. Есть такая теорема. А поэтому, зная все дифференцирования, мы можем узнать, например, все однопараметрические группы автоморфизмов банаховой алгебры. При определённой доле воображения можно считать, что это помогает знать что-то в квантовой механике, потому что однопараметрические группы автоморфизмов — это модели развития во времени квантово–механической системы. Но это пусть говорят физики. А нам важно, что знать автоморфизмы — это интересная задача.

Из того, что я сказал, следует, что очень важно знать, когда дифференцирования являются внутренними. Но это в конкретном примере. А дальше было замечено, что часто бывает так, что для алгебры A дифференцирование $D : A \to A$ не всегда является внутренним, но если вместо A рассмотреть какую-нибудь разумную объемлющую алгебру $\mathcal{A} \supset A$, то в такой расширенной области $\mathcal{A}$ любое дифференцирование алгебры A уже будет внутренним.

Типичный пример такой: $A = \mathcal{K}(H)$ — компактные операторы в гильбертовом пространстве H (упражнение — придумать дифференцирование этой алгебры, которое не является внутренним). Если вы рассмотрите дифференцирования со значениями в алгебре $\mathcal{B}(H)$ всех ограниченных операторов, то все такие дифференцирования являются внутренними, т.е. задаются коммутаторами. Почему это так, мы ещё скажем.

Пытаясь ответить на вопрос, являются ли все дифференцирования со значениями в данном бимодуле внутренними, естественно рассмотреть факторпространство всех дифференцирований по внутренним. Традиционно оно обозначается $\mathcal{H}^1(A, X)$ и называется *первой группой когомологий* банаховой алгебры A с коэффициентами в бимодуле X. То, что в обозначениях используется рукописная буква H, говорит о том, что рассматриваются непрерывные когомологии. Есть ещё и n-мерные когомологии для всех натуральных n, но о них сегодня разговора не будет.

Если Вы занимаетесь дифференцированиями, естественно спросить себя, как же устроены банаховы алгебры A, для которых $\mathcal{H}^1(A, \cdot) \equiv 0$, т.е. их любые дифференцирования со значениями во всех бимодулях являются внутренними? В алгебре эти вещи тоже интересны; там они называются *сепарабельными* алгебрами. В функциональном анализе нельзя это слово произнести, оно занято совсем другими объектами. Здесь они называются *стягиваемыми* алгебрами. Название унаследовано из топологии, потому что из условия $\mathcal{H}^1(A, \cdot) \equiv 0$ следует, что $\mathcal{H}^n(A, \cdot) \equiv 0$ для всех n. А в топологии, скажем, в классе полиэдров, такое условие выделяет стягиваемые полиэдры. Отсюда терминология.

Итак, каковы же стягиваемые банаховы алгебры? В чистой алгебре ответ давно известен. Классическая теорема гласит, что стягиваемые (сепарабельные) алгебры — прямые суммы конечного числа полных матричных алгебр. Для банаховых алгебр такая прямая сумма (т.е., как говорят, классически полупростая алгебра), конечно же, является стягиваемой. А вот верно ли обратное, это один из старых открытых вопросов. Что здесь известно? Известно, что если Вы рассмотрите какой-то конкретный класс с разумными ограничениями, то всегда ответ положительный. Любая стягиваемая алгебра из этого класса классически полупроста. Например, если Вы возьмёте C^*-алгебры, групповые алгебры обоих типов, коммутативные алгебры, то это верно. А в общем случае пока не получается из-за патологических свойств геометрии банаховых пространств. Между прочим, если пример есть, то он очень экзотичен. Тем не менее, я бы не рискнул делать предположение, что обратная теорема верна. Сейчас, по слухам, такой контрпример пытается построить Чарльз Рид — тот самый, который придумал оператор без инвариантных подпространств в банаховом пространстве. А косвенное подтверждение того, что в принципе ничто не запрещает такие контрпримеры, такое. Если мы чуть-чуть расширим класс алгебр, и вместо банаховых алгебр рассмотрим более общие топологические алгебры и даже метризуемые, то алгебра $\mathbb{C}^M$ всех функций на произвольном множестве M с покоординатной сходимостью будет стягиваемой.

Мораль, тем не менее, такова. Мы ещё толком не знаем в точности, каковы стягиваемые алгебры. Но, во всяком случае, мы видим, что узок круг этих алгебр. Их очень мало. Условие стягиваемости является чрезвычайно сильным.

Барри Джонсон в 1972 г. в терминах дифференцирований предложил класс банаховых алгебр, который имеет оптимальный размер. Этот класс оказался чрезвычайно удобным и впоследствии всё более и более популярным. Это и есть аменабельные алгебры. Чтобы их определить, мне нужно понятие дуального банахова модуля. Пусть X — левый банахов модуль над банаховой алгеброй A. Тогда его дуальное (сопряжённое) банахово пространство X^* автоматически оказывается правым банаховым модулем: $\langle f \cdot a, x\rangle = \langle f, a \cdot x\rangle$. Точно так же, если был правый модуль, то сопряжённый к нему является левым модулем. А если с самого начала был бимодуль, то и сопряжённое пространство окажется бимодулем.

Сопряжённых бимодулей гораздо меньше, чем произвольных, и работать с ними гораздо приятнее. Главная причина заключается в том, что единичный шар компактен в слабой* топологии. Когда мы что-то ищем, можно брать ограниченные направленности и их предельные точки. Как правило, они дадут то, что нужно.

Теперь определение аменабельности по Джонсону (1972 г.). Банахова алгебра A называется *аменабельной*[1], если для любого бимодуля X первая группа когомологий с коэффициентами не в самом X, а в его сопряжённом, равна нулю: $\mathcal{H}^1(A, X^*) = 0$. Это условие гораздо терпимее, поэтому аменабельных алгебр больше, чем стягиваемых. То, что данное определение весьма содержательно, показывает следующая теорема Джонсона; заодно она даёт и оправдание термина «аменабельная», который до этого был известен только в теории групп.

Теорема 1.2 (Джонсон). *Банахова алгебра $L^1(G)$ аменабельна то-*

[1] Теперь говорят *аменабельной по Джонсону*, потому что появился целый ряд других вариантов. Второй по важности, самый известный, — Алэна Конна.

гда и только тогда, когда G аменабельна как локально компактная группа.

Я ещё не объяснял, что такое аменабельность для локально компактных групп. Это проще всего сказать так. Одно (а значит, и все остальные) из нескольких стандартных функциональных пространств, связанных с G, имеет инвариантные средние. А именно, если мы возьмём, например, все ограниченные непрерывные функции $C_b(G)$, то на этом пространстве существует функционал $L : C_b(G) \to \mathbb{C}$, который непрерывен, нормализован (т.е. константу 1 переводит в число 1), а главное, левоинвариантен — он не зависит от сдвигов. Отсюда следует, что он правоинвариантен.

Времени доказывать теорему Джонсона у меня нет, а если бы было, я бы дал простое доказательство этой теоремы, но совершенно другими методами, основанными как раз на плоских модулях, о которых речь пойдёт немножко дальше.

После теоремы Джонсона популярность аменабельных алгебр стала расти. Она и сейчас продолжает расти. Сейчас все уже согласны с тем, что это один из самых важных классов банаховых алгебр в общих терминах (не обслуживающий конкретную ветвь анализа, а сформулированный в общих терминах теории).

Возник типовой вопрос, ответ на который каждый раз будет приносить приятную конкретность. Банаховы алгебры работают в разных областях анализа. Групповые алгебры — в гармоническом анализе, операторные — в теории операторов и т.д. Возьмём какой-нибудь конкретный класс, действующий в той или иной науке. И спросим, какие алгебры внутри этого класса аменабельны, а какие нет. Образец — теорема Джонсона; она даёт полный ответ в классе $L^1(G)$. Сразу же люди стали думать о C^*-алгебрах. Но это оказался трудный орешек. По крайней мере, та теорема, о которой я сейчас упомяну, это результат совместных усилий по меньшей мере шести человек. Самый большой вклад внёс, по-видимому, Алэн Конн в работе 1978 г. А завершающий удар нанёс датчанин Уффе Хаагеруп, который вообще известен тем, что он ставит точки в старых открытых проблемах. Теорема получилась такая.

Теорема 1.3. *C^*-алгебра аменабельна тогда и только тогда, когда она ядерная.*

Ядерные алгебры — это очень важный и определяемый во внутренних терминах класс в теории C^*-алгебр. Но у меня нет времени о нём подробно рассказывать, потому что тогда мы уйдём в сторону. Есть много разных определений. Самое короткое такое. C^*-алгебра ядерная, если её обёртывающая алгебра фонНоймана гиперфинитна. Ядерные алгебры очень хороши для тензорных произведений.

Стягиваемых C^*-алгебр гораздо меньше, потому что есть следующая теорема.

Теорема 1.4 (Селиванов). *C^*-алгебра стягиваема тогда и только тогда, когда она конечномерна.*

Ещё один результат заслуживает упоминания. Он из теории функций и относится к равномерным алгебрам. Равномерная алгебра — это замкнутая подалгебра алгебры всех непрерывных функций на своём гельфандовском спектре.

Теорема 1.5 (М. В. Шейнберг, 1973 г.). *Равномерная алгебра A аменабельна тогда и только тогда, когда $A = C(\Omega)$, т.е. A совпадает со всеми непрерывными функциями. (Стало быть, алгебра на диске не аменабельна.)*

Для сравнения отметим, что равномерная алгебра A стягиваема тогда и только тогда, когда она изоморфна $\mathbb{C}^n$ с покоординатным умножением.

Между прочим, эта теорема была доказана давно, но в своё время не была должным образом оценена. А сейчас вокруг неё творится запоздалый бум. Пизье её как-то применил и т.д.

Постепенно за эти годы все наиболее важные и наиболее популярные классы алгебр анализа получили соответствующую разгадку: какие из них аменабельны, а какие нет. Но одна алгебра сопротивлялась — та самая алгебра $M(G)$. Теорема, которую я сформулировал, была доказана в июле 1999 г. Что было известно, и почему возникла та гипотеза, которая была в конце концов подтверждена? Был хорошо известен коммутативный случай. Если G коммутативна, то и её алгебра мер тоже коммутативна. А значит, работает вся гельфандовская теория. У алгебры мер тогда есть пространство максимальных идеалов — гельфандовский спектр, и она представима в виде алгебры каких-то (не всех, конечно) непрерывных функций. Беда лишь в том, что хотя для алгебры $L^1(G)$ в случае коммутативной G спектр известен, и очень хорошо известен — это просто группа, двойственная по Понтрягину, спектр алгебры $M(G)$ — нечто невообразимо ужасное. Чем больше люди с ним работают, тем больше они всяких парадоксов обнаруживают.

В конце 60-х годов Джозеф Тэйлор сделал такое наблюдение, которое ещё раз говорит о том, какой это странный объект. На спектре алгебры $M(G)$ есть участки, которые являются аналитическими многообразиями, и даже бесконечномерными. Но для нас сейчас важно, что на этом спектре всегда есть аналитические диски, т.е. после соответствующего отождествления сужения наших функций (преобразований Гельфанда) будут аналитическими на этих дисках. А аналитичность — это враг аменабельности. Достаточно в качестве бимодуля взять комплексную плоскость[1] $\mathbb{C}$ и рассмотреть функционал, который сопоставляет каждой мере производную соответствующего сужения на этот диск преобразования Гельфанда. Легко видеть, что это как раз и будет дифференцирование (так называемое *точечное* дифференцирование), не являющееся внутренним. Так довольно дёшево получается, что если группа G коммутативна и непрерывна, то об аменабельности нечего и мечтать.

[1] Это, кстати сказать, в своё время тоже было одной из причин, почему нужно рассматривать по возможности больше бимодулей, а не только саму алгебру.

Я замечу, что Тэйлор известен своими выдающимися работами начала 70-х годов, где он впервые дал правильное определение совместного спектра коммутирующих операторов в банаховом пространстве. Но и до этого у него были очень интересные работы по алгебре мер, которые я цитировал.

Так вот, был известен коммутативный случай. Потом был целый ряд работ, в которых, отправляясь от этого случая, обобщался подобный результат. Например, пусть группа некоммутативная, но у неё есть достаточно большая коммутативная факторгруппа. Тогда тоже можно такую вещь доказывать. А что делать, если группа совсем некоммутативная (например, нет нормальных подгрупп), было непонятно. Забегая вперёд, я скажу, что общее рассуждение основано на совсем другом и ничего этого не использует. Оно основано на том, что в непрерывных группах есть тощие (meagre) множества.

1.2. На Востоке

Всё остальное время будет посвящено разным обсуждениям, как же эту теорему доказать. Для этого нужно вернуться в тот же 72-й год и вспомнить, что тогда был «Железный занавес». На Западе есть город Ньюкасл; там сидит Барри Джонсон. Он держит плакат, на котором написано: «Аменабельность». На Востоке есть Москва. Там в эти же годы имела место некая деятельность, с виду никакого отношения к аменабельности и Джонсону не имевшая. А именно, была попытка построить нечто вроде общей гомологической теории сначала банаховых алгебр, а затем и более общих топологических алгебр. Причём цели этой деятельности поначалу тоже не имели никакого отношения к аменабельности. Они были таковы. Уже к этому времени существовали апробированные и важные (все были с этим согласны) непрерывные варианты понятий когомологий $\mathcal{H}^n(A, X)$ и гомологий $\mathcal{H}_n(A, X)$ банаховых алгебр с коэффициентами в банаховых бимодулях. Они определялись как гомологии и когомологии так называемых стандартных когомологических комплексов — прямой аналог (непрерывный) комплексов Хохшильда. Главной мотивацией этой деятельности было желание научиться вычислять эти группы, не будучи привязанными к их исходным определениям в терминах стандартных комплексов, а пользуясь мощными методами, открытыми Картаном, Эйленбергом, Маклейном — отцами–основателями гомологической алгебры. Эти методы заключаются в том, что мы уже не привязаны к стандартным комплексам, а вычисляем наши инварианты с помощью так называемых резольвент тех или иных модулей. А резольвенты эти состоят из модулей, в гомологическом смысле наилучших. А именно:

- проективных;
- инъективных;
- плоских.

Здесь я произнёс три ключевых слова. Это три кита как чистой гомологической алгебры, так и банаховой гомологической алгебры. Но некоторые знают, что для топологических алгебр остаётся два кита, потому что инъективных модулей, как правило, нет. Это недавнее открытие Алёши Пирковского. А у нас будет три кита.

Чтобы всё это применять (а как применять — об этом разговор и пойдёт), нужно дать правильные (это значит — работающие) функционально-аналитические варианты этих трёх ключевых понятий гомологической алгебры: проективности, инъективности и плоскости. Самыми главными для нас будут плоские модули.

Пусть A — фиксированная банахова алгебра. Возникает много разных категорий модулей над A; теперь важно, что это категории. Категория левых модулей обозначается A-mod, правых — mod-A, бимодулей — A-mod-A. Объекты этих категорий — модули, а морфизмы — это морфизмы в чисто алгебраическом смысле (то, что в теории представлений называется сплетающими операторами), но только они должны быть непрерывными, как всегда всё у нас.

Важным для дальнейшего обстоятельством является то, что всё это разнообразие категорий модулей на самом деле кажущееся. Все модули сводятся к левым, но только над более сложной алгеброй. Для меня будет важно, что любой бимодуль можно рассматривать как левый модуль над алгеброй A^e — так называемой *обёртывающей* алгеброй исходной банаховой алгебры. Алгебра A^e строится следующим образом. Присоединим к алгебре A единицу, если её не было. Получим алгебру A_+. Затем рассмотрим противоположную алгебру A_+^{op}, в которой произведение ab определяется как произведение ba в алгебре A_+. Наконец, нужно построить проективное тензорное произведение (классическое произведение Гротендика в теории банаховых пространств) $A_+ \hat{\otimes} A_+^{op}$. Тогда для заданного бимодуля левое внешнее умножение корректно определено по правилу $(a \otimes b) \cdot x = a \cdot x \cdot b$. Поэтому, если что-то определить для левых модулей, то это будет определено и для всех модулей. Понятно, что всё можно свести и к правым модулям. Это тоже будет важно.

Фиксируем $X \in A$-mod. Из всех определений категорий проективных, инъективных и плоских модулей я выберу самое короткое, в терминах главных функторов, действующих в этих категориях модулей. Для фиксированного X можно определить три функтора. А именно, ковариантный функтор морфизмов ${}_Ah(X, ?) : A\text{-mod} \to \mathcal{B}an$, контравариантный функтор морфизмов ${}_Ah(?, X) : A\text{-mod} \to \mathcal{B}an$ и функтор тензорного произведения над A, который действует уже не на категории левых модулей, а на категории правых модулей: $? \hat{\otimes}_A X : \text{mod-}A \to \mathcal{B}an$. Здесь $\mathcal{B}an$ — категория банаховых пространств. Первые два функтора — специализации функтора морфизмов, которые есть в любой категории. Например, первый функтор на объекты действует так: $Y \mapsto {}_Ah(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$. Между прочим, подпространство ${}_Ah(X, Y)$, состоящее из морфизмов из X в Y, замкнуто в пространстве всех непрерывных операторов X в Y. То же самое правило, которое есть на первых страницах любого учебника по теории категорий, показывает, как этот функтор действует на морфизмах. Только результат теперь будет не просто отображение множеств, а линейный непрерывный оператор. Точно так же сопоставление $Y \mapsto {}_A h(Y, X) \subset \mathcal{B}(Y, X)$, вместе с соответствующими определениями для морфизмов, даёт контравариантный функтор. Между прочим, самым важным и общеизвестным специальным его случаем является тот случай, когда $A = X = \mathbb{C}$. Тогда получается функтор перехода к сопряжённому банахову пространству и сопряжённым операторам.

Третий функтор действует так. Каждому правому банахову модулю Y сопоставляется банахово пространство

$$Y \underset{A}{\hat{\otimes}} X := Y \hat{\otimes} X / \overline{l.\ h.} \{x \cdot a \otimes y - x \otimes a \cdot y\}.$$

Здесь $\overline{l.\ h.}$ — замыкание линейной оболочки. Факторизация производится для того, чтобы в результате получить свойство универсальности для сбалансированных операторов. В этом смысл, как в алгебре, так и в анализе, понятия тензорного произведения модулей. Только я хочу подчеркнуть, что левое и правое умножения как бы убивают друг друга, и результат будет всего лишь банаховым пространством.

Как определяются проективность и прочее? Если бы я был в чистой алгебре, то там нет никаких проблем. Я бы просто сказал, что модуль X является проективным, инъективным или плоским, если, соответственно, ковариантный функтор морфизмов, контравариантный функтор морфизмов или функтор тензорного произведения сохраняет точность последовательностей. Если дана точная последовательность модулей из категории области определения, то после применения нашего функтора должна остаться точность.

Если я теперь повторю это определение, но произнесу слова «непрерывность», «банаховость», поставлю над тензорным произведением «крышку», то получится какое-то определение, и даже довольно осмысленное. Беда в том, что будет слишком мало проективных, инъективных и, что сейчас для меня наиболее важно, плоских модулей, чтобы развить содержательную гомологическую теорию, в частности, хорошо считать гомологии и когомологии. Нужно сделать понятия более терпимыми.

В своё время это было сделано с помощью такого предварительного определения. Рассмотрим точную (в чисто алгебраическом смысле) последовательность банаховых модулей $\cdots \leftarrow Y_n \xleftarrow{d_n} Y_{n+1} \leftarrow \ldots$, где d_n, $n \in \mathbb{Z}$, — линейный ограниченный оператор. Эта последовательность называется *допустимой*, если она в некотором смысле идеальна как последовательность банаховых пространств и линейных непрерывных операторов после забывания дополнительной структуры — внешнего умножения. Сказать это точно можно по-разному. Алгебраический метод такой: последовательность допустима, если обладает стягивающей гомотопией, состоящей из линейных непрерывных операторов $\cdots \dashrightarrow Y_n \overset{s_n}{\dashrightarrow} Y_{n+1} \dashrightarrow \ldots$. Я пишу здесь пунктирные стрелки, потому что хочу подчеркнуть, что это, вообще говоря, не морфизм. Он не реагирует на внешнее умножение. Просто должна существовать последовательность линейных непрерывных операторов s_n, для которых выполняется тождество $ds + sd = 1$, где 1 — тождественный оператор в соответствующем банаховом пространстве. Это алгебраический подход. Ясно, что он унаследован из топологии. Есть и геометрический подход. То же самое получится, если в каждом члене потребовать следующее. Поскольку мы уже знаем, что последовательность точная, то можно рассмотреть банахово подпространство $\operatorname{Ker} d_n = \operatorname{Im} d_{n+1}$. Эквивалентное требование состоит в том, что это банахово подпространство обладает банаховым дополнением, т.е. существует дополнительное замкнутое подпространство.

Теперь дадим правильное определение. Банахов модуль называется *проективным*, если его ковариантный функтор морфизмов переводит любую допустимую точную последовательность в точную. Банахов модуль называется *инъективным*, если таким же свойством обладает его контравариантный функтор морфизмов. Наконец, и для сегодняшнего доклада это самое главное, банахов модуль называется *плоским*, если он сохраняет точность допустимых последовательностей после применения функтора тензорного произведения.

Сделаем некоторые наблюдения над этими понятиями.

1) Связь между инъективностью и плоскостью. Оказывается, что модуль X плоский тогда и только тогда, когда модуль X^* инъективный. Когда я говорю о плоскости правого модуля, то я говорю об инъективности левого модуля. Но я уже говорил, что так можно делать, потому что всё сводится к левым модулям.

   Между прочим, это совсем нетрудная вещь. Её можно рекомендовать в качестве приятного упражнения. Главным моментом, который либо можно принять на веру, либо доказать (но тогда это уже будет долгая история), является следующее утверждение, которое вообще лежит в основе всей банаховой гомологии. *Комплекс банаховых пространств* (о модулях мы забыли) *и линейных непрерывных операторов точен тогда и только тогда, когда сопряжённый комплекс точен.*

   Доказательство этого упражнения довольно приятное, потому что оно использует основные принципы функционального анализа — теорему Хана–Банаха и теорему Банаха об обратном операторе; все эти теоремы работают.

2) Проективные модули могут быть охарактеризованы внутренним образом, а именно, как прямые слагаемые так называемых свободных банаховых модулей. Можно дать общекатегорное определение, но я лучше дам явную конструкцию. Рассмотрим банахово пространство $A_+ \hat{\otimes} E$, где E — банахово пространство. Это банахово пространство является также и банаховым модулем: ясно, как определить внешнее

умножение с помощью внутреннего умножения в A_+. Это и есть свободный банахов модуль.

3) Из предыдущего свойства легко выводится, что если модуль проективен, то он заведомо плоский. Теперь заявление, которое оправдывает всю эту науку: «Обратное, вообще говоря, неверно.» Без этого наука была бы тривиальна и неинтересна.

Это — общее место в чистой алгебре. В чистой алгебре этот феномен (разница между жёстким, негибким, требовательным понятием проективности и гораздо более часто встречающимся гибким понятием плоскости) — одно из важнейших наблюдений. То же самое (мне даже кажется, что ещё в большей степени) имеет место и в анализе. И в разных областях анализа это приобретает разные формы. У меня нет времени рассказывать об этих формах подробнее, но хочется об этом хотя бы упомянуть. Так мы естественно подойдём к нашей главной теме. То, что я сейчас буду писать, это на самом деле — содержательные теоремы. Запишу я их в виде пропорции:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\text{проективность}}{\text{плоскость}} = \frac{\text{компактные группы}}{\text{аменабельные группы}} = \\
&= \frac{\text{факторы типа I}}{\text{произвольные гиперфинитные факторы}} = \\
&= \frac{\text{спектр имеет окрестность, содержащую аналитический диск}}{\text{спектр имеет слой, содержащий аналитический диск}} = \\
&= \frac{\text{паракомпактное локально компактное пространство}}{\text{произвольное локально компактное пространство}} = \\
&= \frac{\text{банаховы алгебры с единицей}}{\text{банаховы алгебры с ограниченной аппроксимативной единицей}} = \\
&= \frac{\text{стягиваемая алгебра}}{\text{аменабельная алгебра}}.
\end{aligned}
$$

Что такое ограниченная аппроксимативная единица? В отличие от алгебры, обладать единицей в алгебре функционального анализа — большая роскошь, иногда непозволительная. Такие почтенные алгебры, как алгебра компактных операторов, уже упоминавшаяся алгебра $L^1(G)$, единицами не обладают. А присоединять единицы, как это делают в алгебре, — это совершать насилие. Появляется чуждый элемент, например, некомпактный оператор (тождественный). Но часто так бывает, что единицы нет, но есть её следующая замена. Правая ограниченная аппроксимативная единица в банаховой алгебре A — это такая ограниченная направленность e_λ, что для любого элемента $a \in A$ направленность ae_λ стремится к a. Понятно, как определяется левая аппроксимативная единица; понятно, как определяется двусторонняя.

Ясно, что компактные операторы в гильбертовом пространстве обладают аппроксимативной единицей: нужно взять диагональные матрицы, у которых на первых n местах стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю. Самый классический пример — дельтаобразная последовательность в алгебре $L^1(G)$.

Теперь теорема, которая является основной леммой. Она носит общий характер. Для формулировки этой теоремы нужны понятия дополняемого и слабо дополняемого банахова модуля. Левый модуль $I \subset A$ называется *дополняемым*, если он имеет дополнительное банахово подпространство, т.е. естественное вложение $\mathrm{in} : I \to A$ является коретракцией в $\mathcal{B}an$ (имеет левый обратный ограниченный линейный оператор). Бывает так, что вложение не имеет левого обратного оператора, но зато сопряжённый оператор $\mathrm{in}^* : A^* \to I^*$ является ретракцией, т.е. имеет правый обратный. В такой ситуации мы говорим о *слабой дополняемости*. Классический пример: все сходящиеся к нулю последовательности образуют идеал $c_0 \subset l_\infty$ в пространстве всех ограниченных последовательностей. Этот идеал не дополняем, но слабо дополняем.

Теорема 1.6 (Шейнберг, Хелемский). *Пусть A — банахова алгебра, $I \subset A$ — замкнутый левый идеал. Предположим, что алгебра A обладает единицей или хотя бы ограниченной аппроксимативной единицей. Рассмотрим фактормодуль $X := A/I$. Предположим, что «I хорошо в A расположен», т.е. является дополняемым или хотя бы слабо дополняемым. В таком случае модуль X — плоский тогда и только тогда, когда идеал I обладает правой ограниченной аппроксимативной единицей.*

Идеалы были левыми, а ограниченная аппроксимативная единица должна быть правой. Такой критерий. Как он будет работать — об этом дальше. Пока что я сначала дам интерпретацию наглядную, но менее важную для того, что будет потом, а затем уже дам более существенную. Что лежит на поверхности, если уже знать эту теорему? Обратимся к теории операторных алгебр. Пусть A — C^*-алгебра. Предположим, что дано её алгебраически циклическое представление, т.е. инволютивное представление с циклическим вектором. Очень просто доказать, что тогда гильбертово пространство этого представления является фактормодулем $H = A_+/I$, где идеал I — аннулятор циклического вектора. Есть хорошо известная теорема Сигала о том, что всякий левый замкнутый идеал в C^*-алгебре обладает правой ограниченной аппроксимативной единицей. Отсюда мы немедленно получаем, что наш модуль плоский. А дальше общие методы гомологической алгебры дают, в частности, что $\mathcal{H}^n\big(A, \mathcal{B}(H)\big) = 0$ для всех $n > 0$. Это может представлять интерес в связи с классической в теории операторных алгебр проблемой, стоящей с 57-го года — так называемой проблемой подобия Кадисона, которая такова: всякое ли (вообще говоря, неинволютивное) представление C^*-алгебры в гильбертовом пространстве подобно инволютивному. Это довольно важный вопрос. Недавно выяснилось, что такого рода вопросы — это вопросы о когомологиях. А именно, этот вопрос эквивалентен тому, что $\mathcal{H}^1\big(A, \mathcal{B}(H)\big) = 0$ для всех без исключения представлений (инволютивных). Наш результат имеет с желаемым «симметрическую разность»: тривиальность когомологий доказана для весьма специальных представлений, но зато для всех n.

Теперь более важная для нас вещь. Теорема 1.6 позволила в своё время обнаружить бесконечномерные банаховы алгебры, полупростые, у которых все без исключения банаховы модули плоские. Для этого достаточно (это переносится из обычной алгебры без особых изменений) знать плоскость бимодуля A_+. Из этого уже следует, что все модули — односторонние или двусторонние — являются плоскими. Но если на бимодуль A_+ внимательно посмотреть, то выяснится, что он как раз является частным случаем тех самых фактормодулей. А именно, мы уже знаем, что бимодуль — это то же самое, что левый модуль над обёртывающей алгеброй A^e. Оказывается, что $A_+ = A^e/I^\Delta$, где I^Δ — так называемый *диагональный идеал*. Он представляет собой ядро морфизма произведения $\pi_+ : A_+ \hat{\otimes} A_+ \to A_+$, который переводит $a \otimes b$ в ab. Морфизм произведения корректно определён и является морфизмом бимодулей. Идеал называется диагональным по следующей причине. Если бы алгебра A была коммутативна, то у неё был бы гельфандовский спектр Ω. Тогда у обёртывающей алгебры, как тензорного произведения, гельфандовский спектр — декартов квадрат $\Omega \times \Omega$. Тогда ядро (диагональный идеал) состоит из функций, обращающихся в нуль на диагонали, т.е. $(s, s) \mapsto 0$ для всех $s \in \Omega$. Между прочим, этот идеал весьма популярен в некоммутативной геометрии, особенно после работ Конна. Элементы его называются *некоммутативными дифференциальными формами первого порядка*.

Что это даёт в данном случае? Рассмотрим самую популярную коммутативную банахову алгебру — C на любом компакте; если угодно, возьмите отрезок. Кстати сказать, когда сама алгебра A обладает единицей, «плюсик» писать не нужно: $A_+ = A$. Пусть $A = C(\Omega)$. Её обёртывающая алгебра — $C(\Omega) \hat{\otimes} C(\Omega)$. Это, между прочим, не то же самое, что $C(\Omega \times \Omega)$; этих функций меньше. Но алгебра $C(\Omega) \hat{\otimes} C(\Omega)$ хорошо известна. Она называется *алгеброй Варопулоса*. Эта алгебра очень важна в гармоническом анализе. С помощью этой алгебры Варопулос объяснил решение Майявена проблемы спектрального синтеза. Алгебра Варопулоса довольно сложная, но её идеалы, тем не менее, хорошо изучены. В частности, хорошо известно, что диагональный идеал, состоящий из функций, обращающихся в нуль на диагонали, заведомо обладает ограниченной аппроксимативной единицей. Значит, бимодуль $A_+ = A$ плоский.

1.3. Синтез

В своё время мы получили эту информацию и, может быть, так бы с ней и сидели. И этот класс банаховых алгебр, плоских как бимодули, может быть, так бы и остался в качестве интересного примера — не более того. Но в этот момент сквозь железный занавес пробился мемуар Джонсона, любезно посланный автором. Мы его читаем и видим определение аменабельных алгебр. Класс банаховых алгебр явно очень интересный. И всё время по ходу обсуждения возникают ограниченные аппроксимативные единицы. Например, если алгебра аменабельная, то она заведомо должна обладать ограниченной аппроксимативной единицей. Идеалы при определенных свойствах тоже должны обладать такой единицей. Тут запахло жареным — вроде бы, это очень похоже на то, чем мы занимались. И действительно, после некоторого раздумья была доказана такая теорема.

Теорема 1.7 (Шейнберг–Хелемский). *Для любой банаховой алгебры A следующие условия эквивалентны:*

1) A аменабельна по Джонсону;

2) все модули над A плоские;

3) бимодуль $A_+ \in A\text{-mod-}A$ плоский;

4) гомоморфизм $\pi_+^* : A_+^* \to (A_+ \hat{\otimes} A_+)^* = Bil(A_+)$, сопряжённый гомоморфизму произведения π_+, обладает левым обратным в категории бимодулей (т.е. таким ζ, что $\zeta\pi_+^* = 1$).

Теперь мы видим альтернативный подход к понятию аменабельности. Можно на аменабельность смотреть двумя глазами. В частности, какие из этого можно сделать практические выводы? Главный, к которому я подбираюсь, — это про алгебру мер. Но можно рассказать ещё про одно приложение, в своё время оказавшееся для нас неожиданным. Прежде чем об этом говорить, нужно сказать, что теорема в действительности тройная. Теорема 1.7 — это только её треть. Вторая её часть, значительно более простая и доказанная значительно раньше, говорит о стягиваемости. А именно, алгебра A стягиваема тогда и только тогда, когда любой модуль над A проективный (а не плоский), бимодуль $A_+ \in A\text{-mod-}A$ проективный (а не плоский), наконец, гомоморфизм π_+ (а не сопряжённый к нему) обладает правым обратным. Кроме того, есть ещё третья колонка, которая касается аменабельности по Конну. Это, наоборот, более поздний и более трудный результат.

Теперь иллюстрация — новые примеры не дополняемых (и даже не слабо дополняемых) подпространств, т.е. приложение к геометрии банаховых пространств — старой науке. Предположим, что нам сказали, что алгебра A аменабельна. И вдруг мы нашли у неё левый идеал $I \subset A$, который по каким-то причинам заведомо не обладает правой ограниченной аппроксимативной единицей. Когда это может произойти? Если бы идеал I был слабо дополняемым, то тогда фактор по нему не мог бы быть плоским. А над аменабельной алгеброй все модули плоские. Противоречие. Это всё выглядит схоластически. Но такие примеры, оказывается, есть. Их даёт классический гармонический анализ. Рассмотрим алгебру $L^1(G)$, где G — коммутативная некомпактная группа. Про такие группы классический результат Майявена 1956 года (он и называется *отрицательным решением проблемы спектрального синтеза*) состоит в том, что для них в алгебре $L^1(G)$ существует левый идеал, который не только не обладает правой ограниченной аппроксимативной единицей, но даже не совпадает со своим топологическим квадратом: $\overline{I^2} \neq I$. Следствие такое: идеалы Майявена (а они есть) не являются слабо дополняемыми (как подпространства). Ещё раз повторю, почему. Предположим, что идеал Майявена I слабо дополняем. Рассмотрим фактормодуль $X = A/I$. С одной стороны, он плоский, потому что алгебра аменабельна: все модули над ней плоские. А раз он слабо дополняем, то из критерия следует, что он обладает правой ограниченной аппроксимативной единицей.

Теперь второй пример, значительно более важный для основной темы доклада. Предположим, что мы занимаемся какой-то алгеброй, и хотим знать, аменабельна она или нет. Пусть мы догадались, что она не аменабельна. Как это доказать? Для этого нужно просто предъявить хотя бы один неплоский модуль. И это в точности то, что было сделано с алгеброй мер. В силу теоремы 1.6, чтобы предъявить неплоский модуль, достаточно предъявить левый замкнутый идеал, который был бы (хотя бы слабо) дополняемым, но по каким-то причинам не обладал бы правой ограниченной аппроксимативной единицей. Нашли такой идеал — всё, алгебра не аменабельна. Где нашли такой идеал в алгебре мер $M(G)$?

Теорема 1.8. *Пусть G — произвольная непрерывная локально компактная группа. Тогда в ней существует замкнутый (и даже компактный) нормальный делитель $N \subset G$, обладающий следующим свойством: левый замкнутый идеал $I = \{\mu : |\mu|(xN) = 0,\, x \in G\}$ дополняем в алгебре мер $M(G)$ и $\overline{I^2} \neq I$.*

Из того, что было сказано ранее, автоматически следует, что алгебра $M(G)$ не аменабельна. Дополнительно можно сказать, что если группа G метризуема (а это главный случай, к которому сводятся общие разговоры), то тогда в качестве N можно взять единичную подгруппу: $N = \{e\}$. Тогда $I = M_c(G)$ — идеал непрерывных мер. Этот идеал не совпадает со своим топологическим квадратом. По-видимому это верно не только для метризуемых групп, но и для всех остальных.[1]

Вот что конкретно было сделано в гармоническом анализе.

За оставшееся время я попробую рассказать, как доказывается теорема 1.8. Я сосредоточусь на метризуемом случае. Чтобы доказать, что $\overline{I^2} \neq I$, достаточно предъявить линейный непрерывный функционал $\Lambda : M_c(G) \to \mathbb{C}$, который обладает следующими свойствами: $\Lambda \neq 0$ и $\Lambda(\mu * \nu) = 0$, т.е. сам функционал не равен нулю, но на любой свёртке он равен нулю. Ядро этого функционала меньше $M_c(G)$, но оно содержит его топологический квадрат. Этот функционал связан с тощими множествами, о которых я упоминал. Оказывается (и это главное), если группа G непрерывна, то существует компактное множество $K \subset G$ (канторообразное), которое обладает следующими свойствами:

1) $x_1 x_2^{-1} x_3 x_4^{-1} \neq e$ для любых четырёх различных элементов K. Из этого следует, что $|sK \bigcap tK| \leq 3$ при $s \neq t$, т.е. компакт в каком-то смысле достаточно маленький.

2) Существует непрерывная мера $\mu > 0$, сосредоточенная на K, т.е. компакт в каком-то смысле достаточно большой.

[1] Недавно (осенью 2000) это было доказано.

Если такой компакт K найден, то мы полагаем $\Lambda(\mu) = \mu(K)$. Формула для свёртки, написанная в начале лекции, и свойство (1) показывают, что $\mu * \nu(K)$ — это интеграл от функции, отличной от нуля не более чем на счётном множестве точек. Такой интеграл равен нулю.