1. Ю.И.Манин. Георг Кантор и XX век

28 августа 2003, Манин Юрий Иванович

1.1. Введение

За тему доклада я должен извиниться. Я раньше всегда рассказывал на лекциях какую-нибудь математику, и решил представить более неформальный доклад не потому, что мне нечего доказывать, а потому что на лекции никогда не успеваешь доказать теорему, которую хочешь. И в какой-то момент мне это надоело, и я решил рассказать что-нибудь, что заведомо можно успеть, потому что можно начать в любом месте, прекратить в любом месте и т.д.

История лекций такого жанра начинается для меня с того, что периодически просят рассказать что-нибудь for general audience, как это называется по-английски, т.е. для людей, которые не являются профессиональными математиками; и почему они приходят на эту лекцию — неизвестно. For general audience говорить чрезвычайно трудно, и всегда начинается мучительный выбор темы.

У меня есть излюбленная тема, которую я придумал, и даже знаю, как про нее прочитать лекцию, но никогда этого не делал. Называется она "Почему дважды два — всегда четыре". В этом сюжете очень важное слово — это "всегда". Почему дважды два — четыре, можно продемонстрировать хоть на столе: взять два кусочка мела и еще два. Но вот почему всегда четыре?

Развиваться эта тема должна так. Раз «всегда», значит, речь идет о том, что тут запрятан какой-то закон сохранения. Закон сохранения — это идея, конечно, не математическая; это идея физическая. Простейший вид закона сохранения — это нечто, что аддитивно по областям пространства-времени. Значит, надо уже говорить не о пространстве, а о пространстве-времени, потому что слово «всегда»присутствует. Значит у вас имеется 4-мерное (а может, какое-нибудь еще) многообразие — пространство-время; вы воображаете, что его можно разбивать на области, в каждой из этих областей что-то такое содержится; и вот, когда вы прибавляете одну область к другой, то, что там содержится, должно прибавляться. Вы узнаёте лагранжиан? Если есть аддитивность, значит, есть лагранжиан, действие и т.д..

Таким образом от сюжета «а почему дважды два всегда четыре» вы подымаетесь довольно быстро наверх и попадаете в область гораздо более сложную, чем первоначально рассчитывали. Обычно, дойдя до лагранжиана, я в воображении сам себя останавливал и решал, что, пожалуй, для general audience дальше будет трудно продолжать.

Но это свойство всех сюжетов, когда вы пытаетесь рассказать о чем-нибудь элементарном. Потому что что такое «элементарное» по определению? Грубо говоря, вы что-то такое разлагаете на самые простые вещи. И когда вы доходите до нижнего уровня, когда вы решили, что вот это — самая простая вещь, и вы о ней что-то хотите рассказать, вы просто обнаружите, что вам некуда идти от элементарного, кроме как дальше вверх; т.е. элементарное объясняется посредством сложного. В этом смысле слова проще объяснять сложное, потому что тогда вы создаете искусственное впечатление, что вы какие-то вещи проясняете; объяснять элементарные вещи гораздо труднее.

Дойдя до этой глубокой мысли, я вернулся к сюжету «почему дважды два всегда четыре» и спросил себя: а что такое — два? Когда я спросил себя, что такое два, тут я вспомнил, что, конечно, Георг Кантор дал определение. И вот, развивая этот сюжет, я попытался представить себе, что можно сказать о Канторе сейчас, отдать ему некоторый hommage. В частности, потому что в моем личном развитии как математика Кантор и теория множеств сыграли совершенно особую роль.

По странной прихоти судьбы теория множеств, аксиома Цермело, континуум-проблема и всякие такие вещи были первым, что я всерьез выучил или постарался выучить, когда был в седьмом классе средней школы. Точнее сказать, так: первым был учебник Выгодского по анализу, где я научился дифференцировать, совершенно не понимая, что я делаю, но как-то научился. А потом, когда об этом узнали знакомые моей мамы, меня познакомили с преподавателем Крымского пединститута Яковом Лазаревичем Крейниным, которому я очень благодарен. А он был учеником, в свою очередь, Петра Сергеевича Новикова, и поэтому единственная математика, которую он хорошо знал, была теоретико-множественная математика. И он меня сразу научил абстрактной теории множеств, в частности, аксиоме Цермело и т.д. Воспоминание, которое у меня от этого осталось, — полной непонятности. Когда я пытался себе вообразить разницу между интервалом $[0,1]$ с двумя концами и интервалом $(0,1)$ без этих концов, у меня начинала кружиться голова. Я не знаю, можете ли вы воспроизвести это состояние; я, странным образом, могу. Когда я об этом не думаю, то, конечно, никаких проблем нет, но когда я начинаю думать, у меня начинает кружиться голова. И это было очень сильным эмоциональным впечатлением.

Конечно, в университете теория множеств воспринималась как некий общематематический фон. Никакого возвращения к изначальной канторовской аксиоматике не было. В это время я не пытался представить себе, как мог думать Кантор, как его идеи могли восприниматься в математике, вообще, какое влияние всё это оказало на последующую математику, — в университетские, в молодые годы я об этом не задумывался совершенно.

Второй раз я к этому вернулся, когда писал свой курс математической логики. Тогда я пытался сформулировать для себя просто, вообще, свое отношение к какой бы то ни было проблематике оснований математики. Тогда решение, которое я для себя сформулировал, было резюмировано в первых строчках предисловия.

Я написал, что основания математики изучают математику, а не предписывают ей что бы то ни было. В той же мере, как биология изучает жизнь, а не предписывает жизни что бы то ни было.

Это был такой второй этап, после чего я опять надолго забыл о логике, основаниях математики и теории множеств.

В третий раз я вернулся сейчас к этому и написал некоторый этюд, который желающие могут найти в Интернете. А лекцию с разными вариациями на тему этого этюда я вам сейчас прочту.

Так что это была, как говорили Стругацкие, преамбула, а сейчас будет амбула.

1.2. Что такое "два"

Вернемся к вопросу: что такое два? Как известно, канторовское определение начинается с идеи множества, которая у всех у вас в головах. Поэтому вместо идеи, я думаю, лучше привести его определение, но по-немецки — ни на каком другом языке нельзя воспроизвести музыкальную структуру фразы этого определения, совершенно замечательную. Разрешите мне прочесть на моем плохом немецком языке:

"unter eine Menge verstehen wir jene Zusammenfassung M (под множеством мы понимаем любое собрание M) von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten in unseren Anschauung oder unseren Denken verschiedenen elementen von genannt verden (вполне определенных и различимых объектов нашего воображения или нашей мысли, которые мы называем элементами M) zu einen Ganzen (в единое целое)'.

Вот это слово Zusammenfassung, которое, как скобка открывающая, стоит в начале определения, и zu einen Ganzen (единое целое), которое, как закрывающая скобка, стоит в конце определения, а посредине стоит, что именно объединяют, совершенно замечательно имитирует структуру мысли, структуру образования этого единого целого. И ни на одном языке такой синтаксис не позволителен — он просто не читается — кроме немецкого.

Давайте, кроме множества, напишем на современном языке морфизм множеств — отображение. Произвольное отображение — значит, мы объединяем некоторые пары элементов из X и Y снова в одно множество, так что для каждого x существует единственное y, которое является его значением; так что морфизм множеств также определяется в терминах множества и объединения.

Затем есть изоморфизм в виде биекции. Я применяю современный категорный язык, которым Кантор не пользовался.

Затем имеется определение конечного и бесконечного множества. Давайте начнем с бесконечного.

Бесконечное множество X: $\exists Y \subsetneqq X$ для которого существует изоморфизм $Y \xrightarrow{(1,1)} X$.

Значит, множество, которое биективно своей собственной части, — это бесконечное. Конечное — всё, что остается; конечное — для которого нет такой биекции. В частности, пустое множество $\varnothing$ конечно — потому что у него вообще нет собственных подмножеств.

И наконец, последнее: целое или натуральное число (в частности, двойка) — это класс изоморфизма в категории конечных множеств.

И наконец, последнее: теперь я могу дать определение двойки: 2 — это класс изоморфизма $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Лучше всего, как это сочинил однажды фон Нейман, всё делать из пустых множеств. Тогда мы получаем пустое множество, одноэлементное множество, элементом которого является пустое множество, двухэлементное множество, элементами которого являются пустое множество и то одноэлементное множество, элементом которого является пустое множество.

Вот определение двойки по Кантору. Это, конечно, образец того, что я вам сказал: когда вы пытаетесь объяснить элементарные вещи, вам надо очень сильно усложнять их; иначе их просто некуда объяснять

— мы дошли до низу, и деваться дальше некуда.

Вопрос из зала: «Юрий Иванович, а в выражении "дважды два" две двойки — это одна и та же двойка?» Очень хороший вопрос. Нет, совершенно не обязательно, потому что, если это — класс изоморфизма двух разных, но биективных множеств, то, конечно, не обязательно. Как всегда, вы вычисления делаете на представителях, вы можете взять представителей двухэлементных множеств, которые далеко не совпадают; но как классы изоморфизма они совпадают.

На этом проблемы не кончились. Если еще немножечко подумать об этом и выйти за пределы математики, выяснится, что в естественном языке, в его жизни как бытового языка, как и, скажем, философского языка, а также и в математическом языке, эта первоначальная идея Кантора, что 2 — это 2 чего угодно, присутствует, но не всегда отдают люди себе в этом отчет. Поэтому давайте я проиллюстрирую, как это основное канторовское определение двойки на самом деле семантически представлено в выражениях разной бытовой и философской речи. Я начну с простейшей вещи:

у меня 2 уха —

это элементарная идея двойки: два предмета, которые можно показать пальцем и пересчитать.

Вот для математика уже немножко хуже:

седьмая значащая цифра в десятичной записи числа π есть двойка —

попробуйте быстро или даже не очень быстро сказать, что мы считаем, чего именно два фигурирует в таком определении? Совсем не легко, и, если кто-нибудь из вас со школьниками возится, попробуйте это выяснить.

Еще хуже:

поверхность этой доски 2-мерна —

ну, разумеется, при разумной физической идеализации. Если хотите, пространство 3-мерно — это еще будет хуже — с тройкой.

И то, что мне больше всего нравится (при моей тоже с детства любви к всяким лингвистическим, языковым явлениям):

I doubt it -

английская фраза; вот это "doubt" — это двойка, это индоевропейская двойка. И она повторяется в немецком "zweifeln", также и во французском "douter"; в немецком эта двойка видна, во французском "douter" также видна, как в английском. Это идея сомнения. Почему "два" фигурирует, когда вы обдумываете идею сомнения? Ну, конечно, вы воображаете себе минимум две альтернативы — так или эдак. Но все-таки, как это сказать, чего там два? Философский дуализм — это то же самое, но в более рафинированном и терминологизированном контексте, а вообще — то же самое.

Таким образом просто факты языка позволяют очень мило проиллюстрировать первоначальное канторовское определение двойки, пропустив все эти сложные промежуточные стадии. Но они нужны, потому что вы хотите определить любое целое число, не только двойку.

Язык очень быстро кончается. Вы все знаете легендарные утверждения о языках, скажем, аборигенов Австралии, о том, что счет идет "один, два, три, много". В американском языке существует слово "zillion". Оно не означает ничего, кроме того, что это где-то за пределами того, что мы можем или хотим сказать словами. В конце концов, после двух-трех это идет или после 1984 — не так существенно. Естественный язык не может выразить много чисел; начиная с некоторого момента все выражения естественного языка для чисел, которые мы имеем, являются названиями чисел, записанных в десятичной, скажем, системе счисления, а не именами чисел как таковых.

1.3. Теория множеств

Кантор сам произвел то, что я бы назвал минималистской математикой в том смысле слова, в каком этот термин используется в искусствоведении современном — минимализм музыкальный, минимализм в живописи. Он обнаружил настолько ограниченный список фундаментальных идей, пользуясь которым можно делать необыкновенно глубокую математику, что это поразило и его, и его современников.

Позвольте мне напомнить математику, которую он развил исходя из этого списка основных идей. Опять я буду пользоваться модернизированным современным категорным языком вместо того, чтобы как-то воспроизводить его ход мыслей.

У нас имеются две вещи: категория множеств и объекты этой категории с точностью до изоморфизма. Начальный отрезок этих объектов с точностью до изоморфизма — это целые числа. Следующая канторовская идея была тогда, естественно, — а что дальше? Может быть дальше просто ничего нет? Это бы означало, что конечные множества имеют 1, 2, 3, 4, 5 и т.д. элементов, а бесконечное множество одно, и у него элементов столько, сколько целых чисел.

Конечно, мы знаем массу других бесконечных множеств. В то время самое главное да и сейчас, вероятно, самое главное было множество всех вещественных чисел. И что одних гораздо больше, чем других, не было известно до Рождества 1873 года.

29 ноября Кантор написал Дедекинду письмо, в котором в явном виде спросил, может ли быть биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ — между натуральными числами и вещественными. До этого, по-видимому, не было таких слов. Кажется, он тоже не пользовался словом "биекция"; я не знаю, как он называл взаимно однозначное соответствие по-немецки. До этого невозможно было задать такой вопрос, по-видимому. И это чрезвычайно интересно: мы знаем точную дату, когда впервые оказалось возможным задать такой вопрос. Этот вопрос был задан Кантором в письме Дедекинду 29 ноября 1873 г.

А после Рождества (через несколько дней после Рождества, у меня точной даты, к сожалению, нет) Кантор нашел доказательство того, что это нельзя сделать. И опять написал Дедекинду: у меня есть доказательство, но я не могу ему поверить.

Доказательство Кантора состояло, конечно, в его знаменитом диагональном процессе. Диагональный процесс существует в разных вариантах: можно воображать себе вещественные числа, записанные, скажем, в бинарных разложениях бесконечным списком, а потом в диагональном разложении изменить каждый бит на противоположный, как это обычно делается. Но это быстро обобщается и принимает гораздо более приятную форму в виде общего неравенства $2^x > x$ (строго больше!), которое для целых чисел, конечно, вполне очевидно, хотя, если подумать, тут тоже не одно доказательство.

В общем, смысл этого такой: если у вас имеется множество X, то $\operatorname{card} 2^X > \operatorname{card} X$. И доказывается это обычным диагональным процессом: мы воображаем себе, что мы можем установить биекцию $x \xrightarrow{(1,1)} U_x$, поставив в соответствие каждому $x \in X$ подмножество $E_x \subseteq X$. А потом доказываем, что это предположение приводит к противоречию, потому что есть очень специальное подмножество V, которое по определению состоит из тех x, которые не содержатся в подмножестве $u(x)$, которое соответствует x. Следующее множество V не имеет форму $u(z)$ ни для какого z: $V = \{y | y \notin U_y\} \neq U_z$.

Это обычная форма современной диагональной процедуры родственная, конечно, старинному парадоксу лжеца. Это тоже совершенно очаровательный сюжет о том, как странные словесные конструкции, очень часто восходящие к грекам, могут превратиться в точные глубокие математические теоремы, которые после Гёделя мы все однозначно интерпретируем как ограниченные возможности языка или, вообще, любого финитарного образования передать свойства бесконечности.

Итак, $2^X > X$. И из математики Кантора (если не говорить о, так сказать, предматематике, к которой я вернусь позже) самым знаменитым стал, грубо говоря, вопрос о том, на сколько 2^X больше, чем X. Есть ли между 2^X и X, когда X счетно, что-нибудь еще? Когда X — это счетное множество, 2^X — это множество всех подмножеств счетного множества (оно имеет мощность континуума — мощность множества $\mathbb{R}$ всех действительных чисел). И вопрос был такой: совпадает ли это с наименьшей несчетной мощностью $\aleph_1$. Вот гипотеза континуума: Кантор полагал, что мощность континуума равна $\aleph_1$. Сейчас точка зрения большинства людей, которые глубоко и профессионально думали об этом, состоит в том, что на самом деле мощность континуума гораздо больше.

Это вопрос является математическим или долго казался математическим, и в наших воспоминаниях, в нашем образе математики Георга Кантора в XX веке, вероятно, эта проблема — континуум-гипотеза, ее судьба, доказательство ее независимости, доказательство ее непротиворечивости, сомнения в том, что, вообще, этот вопрос имеет смысл, занимает, вероятно, основное место.

Я хочу поговорить не о судьбе этого вопроса, а о судьбе минималистской математики, которая воплощена скорее в канторовских определениях, в канторовском способе мысли, чем в канторовской задаче. Но, пожалуй, я этому посвящу вторую половину лекции, а сейчас немножко поговорю о континуум-гипотезе.

1.4. P/NP-проблема

Я хочу коснуться двух сюжетов. Один состоит в том, что этот вопрос всплыл для конечных множеств довольно неожиданным образом для математиков — как P/NP-проблема.

P/NP-проблема совсем родственна не континуум-гипотезе, а проблеме, которая связана с аксиомой Цермело. Аксиома Цермело, как известно, постулирует возможность некоторой общей конструкции теории множеств. А именно: у вас есть множество X, есть множество всех его подмножеств 2^X, и аксиома Цермело постулирует, что вы можете выбрать по элементу в каждом подмножестве, непустом, разумеется. Больше ничего — просто выбрать по элементу в каждом подмножестве.

Предположим, что X конечно. Есть ли в этом какая-нибудь математика? Есть, если вы начинаете эти конечные объекты кодировать и спрашивать, можете ли вы все эти операции делать за полиномиальное время. Я утверждаю, что проблема P/NP — это в точности проблема аксиомы Цермело в финитном мире.

Давайте я чуть-чуть поговорю об этом, потому что это — сюжет занятный и потому что, предвкушая разные другие события, я хочу сразу сказать, что он имеет отношение, по-видимому, к психологии или нейробиологии. То обстоятельство, что теория множеств затрагивает какие-то глубокие психологические архетипы, было понятно с самого начала. В обширной переписке разных людей, которые одобряли или не одобряли теорию множеств, — Лебег, Э. Борель — многие люди высказывались в таком роде: вот я применяю аксиому Цермело, я должен думать о разных множествах, а откуда я знаю, что я в каждый момент думаю об одном и том же? То есть возникало смутное беспокойство о том, способны ли мы сохранить во время теоретико–множественных рассуждений ту ясность ума, которая постоянно связывалась с занятиями математикой и которая для Декарта, например, была просто основным критерием обоснованности научного или математического рассуждения — ясность ума в процессе этого рассуждения.

Так же, как, скажем, (только в обратном направлении), для Поллока (известного американского абстрактного экспрессиониста), когда он делал свои холсты, выдавливая на них из тюбиков краски или капая на них кистью, окунутой в ведро краски, — для него основным критерием того, сделал он вещь или нет, было — сумел он себя ввести в транс во время этого процесса или он сохранял ясность сознания; если он сохранял ясность сознания, значит, вещь не удалась. Для математика это прямо наоборот.

Давайте немного поговорим о проблеме, на сколько 2^X больше, чем X, на примере P/NP. Это обычная вещь: мы выбираем U_m — это будет наше первоначальное множество; там сколько-то позиций — m позиций. Потом, конечно, 2^m представлено тем, что вы на этих позициях можете ставить нули и единицы: множество всех последовательностей нулей и единиц, стоящих на этих позициях, это 2^m. Во всех разумных смыслах это гораздо больше, чем m, экспоненциально больше.

Мы хотим рассматривать подмножества U_m. И элементарная теорема состоит в том, что подмножества U_m находятся в биекции с элементами соответствующей булевой алгебры:

$$U_m \supset X \xrightarrow{(1,1)} \{f | f \in \mathbb{Z}_2[x_1, \ldots, x_m]/(x_i^2 + x_i)\}.$$

Булева алгебра для меня (я буду думать в терминах коммутативной алгебры — во-первых, я к этому привык, а во-вторых, это гораздо удобнее) — это кольцо полиномов от m переменных, над полем из двух элементов отфакторизованное по идеалу, порожденному $x_i^2 + x_i$. Люди с алгебро–геометрическими взглядами знают, что я просто беру точку m-мерного аффинного пространства инвариантную относительно эндоморфизма Фробениуса (Фробениус, конечно, действует на множестве таких последовательностей). А соответствие такое: $f \mapsto \{x | f(x) = 0\}$ — функции отвечает множество ее нулей). Есть такая элементарная и красивая теорема: вы получаете таким образом биекцию; теорема, которую я тоже рекомендую для школьников и студентов — очень приятное упражнение.

И тогда вопрос Цермело в этом контексте выглядит так: по данному f найти элемент x_0, для которого $f(x_0) = 0$, или доказать, что его нет, а это значит — доказать, что $f \equiv 1$.

Решить эту задачу нетрудно перебором. Считайте значения f, пока не доберетесь до нуля; ни разу не доберетесь — значит, функция тождественно равна 1. Но, конечно, в P/NP-проблеме мы хотим сделать это за полиномиальное время. Тогда вопрос: за полиномиальное от чего? И тогда задача состоит в том, чтобы выбрать какое-то кодирование f (например, мы можем f задавать просто списком его коэффициентов).

Мы должны выбрать кодирование f какими-то комбинаторными объектами, у которых есть естественная величина в битах. И потом поставить вопрос о существовании алгоритма нахождения x_0, для которого $f(x_0) = 0$, за время, полиномиальное от битовой величины кода f.

Очень красивая математика, связанная с этой задачей, содержит два утверждения, которые являются частью некоторой теории — главки вычислительной математики. Я скажу об этом только две вещи.

Ответ на первый вопрос выбирается такой: коды f — это по определению такие объекты: $u = \{N; (S_1, T_1), \ldots, (S_N, T_N)\}$, где $S_i, T_i \subset \{1, \ldots, m\}$ — выбирается целое число N, и потом выбирается N пар подмножеств в множестве индексов $\{1, \ldots, m\}$. Каждый такой выбор n и N пар является кодом одного из f: если такое u задано, то

$$f_u = 1 + \prod_{i=1}^{N} \left(1 + \prod_{k \in S_i} (1 + x_k) \prod_{j \in T_i} x_j \right).$$

Битовая величина этого выражения равна mN.

Приятное упражнение состоит в том, что любое f можно записать в такой форме, хотя и не однозначно — это цена за то, что я сейчас скажу (в третьем пункте).

Третий пункт состоит в том, что, когда вы выбираете такое кодирование, ставите задачу таким образом, вы получаете универсальную P/NP-задачу. То есть, если вы сможете доказать, что для этой задачи есть решение за полиномиальное время, то для всех P/NP-задач оно есть; а если для этой нет, то, стало быть, P не совпадает с NP.

Таково было замечательное открытие, сделанное в вычислительной математике XX века. И прелесть его состоит для меня в том, что это в некотором роде возвращение к минималистской математике Кантора — именно математике, а не способу ее организации, о котором я буду говорить позже. Эта финитарная версия P/NP-проблемы, как я написал у себя в этом самом тексте о Канторе — это континуум-гипотеза для бедных. Не намекая, что за ее решение назначен приз миллион долларов.

Вот это такая замечательная трансформация, травестирование гипотезы континуума в конце нашего века. До этого я говорил про аксиому выбора, но гипотеза континуума (есть ли что-нибудь между m и 2^m) в финитарном мире имеет очевидное решение: конечно, да, и много чего. Поэтому я переформулировал гипотезу: насколько 2^m больше m? И ближе всего та переформулировка, которая связана с гипотезой Цермело. Гипотеза Цермело очень близка к тому способу, каким Кантор думал.

Вообще, эта дистанция, пройденная в математике абстрактных множеств XIX и XX века очень похожа на дистанцию, пройденную в политических системах от, скажем, гибели аристократических режимов до рождения демократических режимов. В некотором роде P/NP — это очень демократическая версия канторовской задачи теории множеств.

Кантор сам думал о своем открытии, о том, что количество разных бесконечностей бесконечно, как непосредственно боговнушенном ему. Он был мистиком или, во всяком случае, был очень близок к мистицизму. Он общался с католической церковью на предмет какой-то легитимизации своих изысканий. Он прямо и непосредственно считал, что его работа является боговдохновенной; и легитимизация требовалась для этого ощущения: является ли это действительно боговдохновенным, как он полагал.

И травестия бесконечности бесконечностей в компьютерной технике мне кажется очень занятным и символическим обстоятельством.

1.5. Биография Кантора

Я хочу начать второй час с очень краткого биографического очерка жизни Кантора.

Он родился 3 марта 1845 года в Санкт-Петербурге, в России, в немецком семействе, которое переехало в Висбаден в 56 году, когда ему было 11 лет. С этим обстоятельством связаны его попытки в начале уже XX века переехать в Россию и получить в России дипломатическую службу, когда он чувствовал себя жестоко обиженным немецким математическим истеблишментом того времени (попытки эти не оказались удачными).

Затем он до 67 года, т.е. до 22 лет учится, в частности, в Цюрихе, Берлине, Гёттингене и затем снова в Берлине. Затем у него идут первые публикации: теория чисел, квадратичные формы. В университете Галле в 69 году, стало быть, в 24 года у него происходит хабилитация. Точно не знаю, но по нынешним меркам в Германии это примерно как наша докторская диссертация; если это так, то он очень рано это сделал. Затем идет серия 3–4 года: работы по сходимости тригонометрических рядов. Так что он начал заниматься абстрактными множествами, воображая себе разные изысканные подмножества вещественных чисел, связанные с теорией тригонометрических рядов, т.е. с анализом, по существу.

И затем он начинает размышлять об абстрактных множествах. Обнаруживает в конце следующего периода, в 79 году, с одной стороны, существование разных порядков бесконечности: неравномощность целых чисел и вещественных чисел. И напротив того, совершенно контринтуитивный результат: существование биекции между евклидовыми пространствами любых размерностей — в то же самое время. Сейчас мы к этому привыкли, но это было очень странно. В 74 году происходит первая публикация теории множеств, ему, стало быть, 29 лет. Затем следующие 5 лет — серия статей: бесконечные линейные множества чисел. 83 год, ему 38 лет — появление книги "Основы общей теории множеств".

И май 84 года — первый приступ нервной болезни после успешного и очень приятного путешествия в Париж. У него произошло то, что бы сейчас назвали приступом депрессии — с весны по осень, с мая 84 года.

После чего в 85 году он ведет переписку с католическими теологами. Но в математическом мире как будто бы остается всё более и более изолированным. В 85 году был такой конфликт с Миттаг-Леффлером, что он чувствовал, что его математические идеи в математическом мире просто не принимают, причем не принимает группа самых крупных математиков этого времени.

Он делает замечательную вещь (считаю это очень в духе демократического XX века), а именно, он основывает немецкое математическое общество — 18 сентября 1890 года. Чтобы получить, как сказали бы мы в наш политический век, какую-то такую более массовую базу и иметь возможность влияния на аморфную массу математиков более низкого уровня, чем те, которые занимали лучшие кафедры в европейских городах; чтобы иметь вес. Это такое замечательное решение.

В частности, как известно, была очень сильная оппозиция Кронекера, сказавшего: «целые числа создал Бог» — в противоречие с мнением Кантора. Но Кронекер также назвал (знаменитая его фраза) Кантора „совратителем юности". И эта фраза содержит тонкое отрицание самой себя: как известно, Сократ был осужден как совратитель юности. Поэтому неявное сравнение с Сократом — это довольно тонкий комплимент, но спрятанный таким вот выражением.

Затем умирает Кронекер — его крупнейший научный враг. И, напротив того, Немецкое Математическое Общество цветет. И Кантор же приложил массу усилий, теперь уже как глава этого общества, к основанию первых международных математических конгрессов.

В 1897 году происходит I Международный Математический Конгресс, на котором теория множеств действительно очень видна, и в каком-то смысле получает штамп общественного интереса — вместо того, чтобы быть отодвинутой на периферию как сочинение нездорового ума. До такой степени этот процесс происходит быстро, что на следующем математическом съезде в знаменитом списке гильбертовских проблем континуум-проблема становится задачей номер 1. Это высший момент, просто триумф Кантора, которого он добился странным образом — такой вот общественной деятельностью, повторяю, чрезвычайно созвучной XX веку, а не тому аристократическому веку, когда математикой управляли крупнейшие умы, а что такое математическое общество было делом неизвестным и неинтересным.

Конечно, происходят и противоположные процессы, и с началом XX века в каком-то смысле дела идут под горку. Даже Гильберт, который сделал так много для того, чтобы теория множеств, в частности, континуум-гипотеза заняли почетное место в умах математиков, когда он позже высказался в том стиле, что никто не может выгнать нас из рая, созданного для нас Кантором, — этот комплимент, в противоположность кронекеровской фразе, содержал тонкую насмешку: это был намек на то, что Кантор полагает, что он боговдохновен, что его математика боговдохновенная, что, значит, из его рая нас никто не выгонит. Так что всё было очень неоднозначно.

В 99 году у него умирает сын Рудольф, и он дважды попадает в нервную клинику в Галле. 1902/3 год — опять зимой госпитализация; 1907/8 год — то же самое; 1911/12 год — то же самое.

В 1915 году в Галле собирались праздновать 70-летие Кантора на международном уровне. Но в момент подготовки началась I Мировая война. На международном уровне празднование было уже невозможно; его кое-как свернули на национальном уровне.

И после очередного периода госпитализации 6 января 1918 года, в момент очень глубокого тяжелого положения и Германии, и всей Европы, и всего западного мира, как мы знаем, Кантор умирает.

Такова примерно его биография.

Я не помню, в каком точно году, он подал заявление о принятии его в российское гражданство и на дипломатическую службу в России — до такой степени он чувствовал себя замученным неприятием теории множеств.

1.6. Кантор и XX век

Между тем, неприятие во многих отношениях было совершенно искренним. Можно, конечно, понять, что особо суровые выражения французских математиков были связаны с обычной германо-французской враждой и т.д.

Занятно, что даже эмоциональные чувства по поводу гипотезы континуума имеют тенденцию возрождаться. Я с некоторым изумлением прочел в очень замечательной статье Мамфорда в его сборнике "Математика XX века" описание малоизвестной статьи Фрелинга, которая приводит некоторые аргументы в пользу того, что гипотеза континуума очевидным образом ложна.

Аргумент занятный. Он сопровождается картинкой о бросании стрелок в цель. Нужно вообразить себе континуум, реализованный как множество точек доски; и вообразить себе континуум-гипотезу в цермеловской форме: что континуум можно вполне упорядочить таким образом, чтобы любой начальный отрезок был счетным (для каждого p то, что меньше p при этом упорядочении, чтоб было счетным). Дальше он предлагает себе вообразить исход этого эксперимента: вот сначала бросает один игрок, потом другой; скажем, один попадет в точку p_1, другой — в точку p_2. Посчитаем вероятность того, что $p_2 < p_1$. Вероятность равна 0, потому что только счетное число точек меньше, чем p_1. Но, поскольку всё равно, кто первый бросает, кто — второй, то в таком же рассуждении вероятность того, что $p_1 < p_2$ тоже равна 0. А так как это исчерпывающие события, то говорить не о чем.

И Мамфорд дальше пишет очень сильную фразу о том, что он надеется, что такое рассуждение избавит, наконец, нас от всех этих глупых размышлений над бессмысленной конструкцией теории множеств. Что меня удивило в этой фразе — это искренность чувства. Это показывает, что психологические проблемы, связанные с этим канторовским открытием, склонны самовоспроизводиться. Не потому что так учили или почему-нибудь еще; Мамфорд — абсолютно замечательный математик, что нужно знать, он, конечно, знает. Но как-то нет успокоения, тем не менее. Вот это очень занятно.

Статья его называется "The Dawning of the Age of Sthohasticity" (т.е. "Заря века случайности" или что-то в этом роде). И математическая пропаганда, которая в ней содержится, состоит в том, что все основные понятия математики имеют вероятностный характер, и поэтому с самого начала, с оснований ее так и надо перестраивать, и дальше — тоже. И вся наша привычка к детерминированным вещам, к точным и т.д. — неправильная, и что, вообще, нужно иначе обо всем этом думать.

Я решил, что название статьи — "Заря века случайности" — связано с известной историософской схемой Джамбаттиста Вико, которую я 30 лет назад вообще не принимал всерьез, а сейчас, наоборот, начинаю всерьез в нее верить. Очень грубо говоря, его историософская схема такая. В истории человечества сменяются периоды: был период варварства (я уж не знаю, как он его обозначает); потом был теократический период (грубо говоря, начала единобожия в разных вариантах и соответствующая схема общественного устройства), сменившийся аристократическим периодом (сильная монархия, герои и прочее), который сменяется демократическим периодом — предположительно мы жили в нем в XX веке; после чего, после некоторого периода хаоса, мы перейдем к очередному теократическому периоду. Почесавши себе голову после 11 сентября, я решил, что очень похоже, что Джамбаттиста был прав, что он что-то угадал. Он писал в 1725 году. Я думаю, что он несомненно имел в виду в то время уже и Китай, и Индию, но вряд ли, скажем, Южную Америку и Африку. Это очень любопытно. Вообще, нужно прочесть. Я, к сожалению, не добрался до первичного источника и пересказываю его теорию со слов Блюма — книга "Западный канон". Я всё собираюсь добраться до настоящего текста Вико и даже хотел бы прочитать его по-итальянски, но что-то никак его не добуду.

И я написал Дэвиду, не намекает ли он на эту теорию Вико, и он мне ответил, что нет, он, собственно говоря, имел в виду название мюзикла на Бродвее, в котором его сын как-то участвовал. Я немножко огорчился, но и посмеялся тоже.

Во всяком случае, искренность чувства по отношению к континуум-проблеме меня поразила.

1.7. Кантор и Бурбаки

Я говорил до сих пор в основном о двух вещах: о математике, которую оставил нам Кантор, и о социологических и психологических обстоятельствах того, как он работал и как его идеи воспринимались — рецепции его идей при его жизни и после. Теперь я хочу сказать немного об этом круге идей, которые, грубо говоря, суммированы в списке основных канторовских определений, как мы его читаем сейчас, как его можно кратко переформулировать.

Как мне кажется, главным событием, которое является прямым наследником канторовской мысли, хотя это, вероятно, не всеми историками математики будет признано, является деятельность группы Бурбаки. Бурбаки были довольно глубоко безразличны математические проблемы бесконечности, безразличны до степени negligeance, до пренебрежения. Так что, когда нужно было написать том об основаниях математики, он не получился совершенно. Видно было, что это им совершенно неинтересно. А вот что им было интересно — это потенциал теории множеств как исходного минималистского материала для воображения; потенциал теории множеств для создания потенциально единого языка для всей математики, что бы это ни было — топология, теория вероятностей, алгебра, геометрия — что угодно. Потенциально единый язык. И с моей точки зрения высокая заслуга Бурбаки состояла в том, что они этого добились, по крайней мере, на некоторое время.

Они сформулировали язык структур, согласно которому любой математический объект есть, грубо говоря, множество и дополнительные данные, которые, опять же, в терминах теории множеств формулируются: там, какие-то элементы в лестнице (echelle), построенной из данного исходного множества. Например, группа — это множество плюс закон композиции, плюс такие-то свойства. И всё, что нужно сказать в определении математического объекта, всё формулируется в терминах множеств и элементарных операций над ними.

И потом разные математики, далеко не одни Бурбаки: так, скажем, достижение Колмогорова — это чисто бурбакистский проект: показать, что теорию вероятностей можно сформулировать как теорию меры. Опять же, Синай очень сильно возражал мне на эту тему. Я не хочу сказать, что формулировка теории вероятностей как главы теории меры исчерпывает ее содержание, и тем более, не исчерпывает интуиции позади вероятностных и статистических рассуждений. Но несомненно, что сформулировать, не потеряв почти ничего в объекте, так можно.

Так вот, мне кажется, что прямым наследником этой части канторовских идей несомненно были Бурбаки, даже если они сами с этим, возможно, и не согласились бы. И что результатом этого было наблюдавшаяся нами, скажем, во второй половине XX века унификация общематематического языка, которая в принципе позволяла кому угодно — топологу читать и понимать определения и доказательства в статье по чему хотите. Но далеко не всегда так было. Нужно отдать себе отчет, что во времена, когда, предположим, Кантор работал, читать и понимать статьи по алгебраической геометрии итальянской школы мог только алгебраический геометр, предпочтительно, итальянской школы, ну, может быть, немецкой кое-как, но уже больше никто. Сейчас это не так: в принципе, кто угодно может читать статьи на какие угодно темы. И это несомненно заслуга Бурбаки.

Опять же, мы присутствуем сейчас при разрушении этого порядка вещей, которое произошло из-за возобновившихся взаимодействий математиков с физиками. Это тоже чрезвычайно интересный процесс. И может быть, стоит немножечко сказать о том, опять же, как это виделось во времена Кантора.

Кантор отнюдь не был равнодушен к физике; но физика, которую он знал и которую он понимал, была чрезвычайно наивна. В результате, в его знаменитом определении множества зафиксировано, заморожено такое наивное представление о внешнем мире как о мире, состоящем из различимых вещей. Конечно, необходимая доля абстракции там присутствует.

У Кантора было, по крайней мере, два известных мне рассуждения, где он в явном виде привлекает физический мир. Одно было замечательное: он полагал, что в мире должно быть счетное количество лейбницевских монад-атомов — материальных точек, по-видимому, массивных, и континуум безмассовых квантов — он их называл эфирными монадами; т.е. он полагал, что все эти вещи прямо есть и их можно считать. Второе его физическое рассуждение было такое: он считал, что одним из оснований для механики, для классической физики является наше представление о непрерывности, которое, в свою очередь, есть абстракция представления о непрерывном движении; и вот поэтому мы постулируем, что наше 3-мерное пространство, его точки параметризуются, скажем, тройками вещественных чисел или чем-то в этом роде. Он доказал красивую теорему, которая очень неожиданна для своего времени: если выкинуть из $\mathbb{R}^3$ счетное множество точек, то в оставшемся подмножестве любые две точки можно соединить непрерывной кривой. И стало быть, наше пространство вполне может пропускать какое-то всюду плотное множество, и при этом свойства непрерывности как-то сохранятся. Поэтому он ставил вопрос о том, не надо ли учесть эти новые математические факты при продумывании истинных основ механики.

Но дальше этого он не пошел. Он не дошел даже до такой простой и очевидной, скажем, для Лагранжа или для кого-то еще физической идеи о том, что математические множества наиболее существенные для физики никогда не суть множества вещей, они в лучшем случае суть множества возможностей. У нас есть конфигурационное пространство, (мы описываем систему конфигурационным пространством); одна точка конфигурационного пространства — это возможное положение или возможное состояние системы, но вовсе не то, что существует или даже реализуется: может быть система никогда в этот угол своего конфигурационного пространства не залезет. Тем более, фазовое пространство (это значит: точка — это точка конфигурационного пространства плюс инфинитезимальный вектор, так сказать, импульса, касательный вектор), тем более ясно, что это только возможность, это не есть вещь. Когда при развитии классической физики она перешла в моду квантового описания, т.е. мы перешли от, скажем, фазового пространства, грубо говоря, к L^2 на конфигурационном пространстве, каждая точка которого, — ψ-функция — тем более очевидным образом является некой возможностью квантового состояния системы, но отнюдь не вещью. С самого начала и во времена Кантора физикам было понятно, что если множества как-нибудь существенны для описания внешнего мира, то отнюдь не как множества вещей.

Чисто педагогически, кстати, у меня всегда вызывает возражение эта иллюстрация множеств на вещах, когда мы учим детей. Конечно, хорошо говорить о множествах стульев физически вот в этой аудитории. Но это абсолютно misleading, мы не должны этого делать, мы должны очень рано уйти от этого. Множества — это то, что себе воображаешь, а не то, что есть и то, что можно пересчитывать.

Если бурбакистский проект, на мой взгляд, никак канторовскую программу не менял и не дезавуировал, а наоборот, развивал в очень позитивном смысле, то, напротив того, взаимодействия с физикой всегда уводили мышление математиков до такой степени в сторону от того, что они унаследовали от предыдущего этапа и как бы им хотелось думать. Это повторялось много раз. И для какого-то из докладов я составил такую параллельную таблицу основных вещей, которыми занимались физики, и основных вещей, которыми занимались математики в течение XX века, и получилось, что они почти не пересекались. Вот начало, скажем с 1880 г.: в математике — Кантор строит теорию множеств, Стилтьес, Лебег, Борель исследуют, что такое интеграл; в это же время у физиков Максвелл занимается электричеством, магнетизмом и термодинамикой. Было видно, что, невзирая на то, что физическая интуиция оплодотворяла какую-то математику, а физики, наоборот, пользовались каким-то развитым аппаратом, было видно, что центральные вещи, которые их волнуют, почти никогда не совпадают; не только иногда. Удивительный результат такого исторического размышления. Против этого обычно возражают, когда я объясняю такие вещи на лекциях; но, во всяком случае, меня никто не смог переубедить. И мне кажется, что этот уход, потеря интереса ко всей канторовской проблематике, включающей теперь и бурбакистский подход к математике — он именно связан с этим возобновившимся периодом взаимодействия с физиками, когда идеи, которые приходят, являются очень нематематическими по существу, хотя невозможными для иного выражения, кроме как на математическом языке — такой вот замечательный парадокс. В конце концов, сейчас сотни математических работ так или иначе используют понятие фейнмановского интеграла. Между тем понятие фейнмановского интеграла сейчас определено не лучше, чем понятие интеграла Римана (я уж не говорю, Лебега) до того, как появилась статья Кеплера о стереометрии винных бочек — это было первое разумное математизированное определение интеграла. Тем не менее. Всем бурбакистским нормам это совершенно не удовлетворяет.

И я сейчас просто с каким-то расстройством недавно наткнулся на цитату из Андре Вейля, который в 53, кажется, году на очередном математическом съезде с гордостью сказал: "Мы уже не спрашиваем, строго ли доказана теорема, мы спрашиваем, доказана ли она". То есть ему казалось, что к 53 году вопрос о приемлемом уровне математических рассуждений уже наконец решен раз и навсегда. И конечно, подразумевалось, что благодаря деятельности Бурбаки. К счастью, мы видим сейчас, что он опять вернулся в некоторое серое смутное состояние, в сумеречную область; и те, кто этим могут творчески пользоваться — они очень от этого счастливы. И я чувствую тоже некоторое освобождение от тяжелой обязанности находиться всё время в рамках бурбакистского объединения; тем не менее, которое я чрезвычайно ценю. И я считаю, что нужно сохранять разумный баланс между тем и другим.

1.8. Теория множеств и теория категорий

В оставшиеся 10 минут я хочу сказать еще несколько слов о том, что произошло после бурбакистской программы. Это связано с деятельностью человека, личность которого в некоторых отношениях похожа на личность Кантора, — Александра Гротендика.

Гротендик, как известно, заменил бурбакистский язык структурированных множеств на язык категорий. До сих пор достаточно строго и четко характер этой замены не был проанализирован, как-то нигде никаких текстов не написано. Поэтому давайте, очень кратенько скажу, что произошло. Были введены категории — объекты, морфизмы, как вы все хорошо знаете. Объекты перестали быть множествами, морфизмы остались множествами. И первые категории, которые рассматривались, были просто классами структурированных множеств, структурированными множествами, поэтому это не было уходом от Бурбаки.

Гомотопическая топология сделала некоторый прорыв. Основной объект гомотопической топологии — это не топологическое пространство, а топологическое пространство с точностью до гомотопии. Топологические пространства гомотопически эквивалентные друг другу, представлены: точкой, вещественной прямой $\mathbb{R}$, плоскостью $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, бесконечномерными клетками, и т.д. Поэтому уже нельзя сказать, что основной объект гомотопической топологии является структурированным множеством — это просто неверно. Вы не поймете даже толком, как строить классифицирующее пространство группы, если вы поверите, что вы должны работать с топологическими пространствами.

Второе: сама категория как математический объект. Сама категория первоначально выглядит как традиционная математическая структура. У меня имеется множество объектов, между ними множество морфизмов с частичным законом композиции. Но мы уже хорошо знаем, что категории нельзя рассматривать с точностью до изоморфизма; это бессмысленное понятие. Например, есть категория, конечномерных линейных пространств над полем (каким хотите, над $\mathbb{C}$, например). Там есть важнейшая инволюция — звездочка (переход от пространства к сопряженному пространству — пространству линейных функционалов). Это должно было бы быть изоморфизмом категорий; но это изоморфизмом не является. Это является эквивалентностью категорий. Есть очень существенная разница между изоморфизмом и эквивалентностью категорий. И таким образом основной постулат Бурбаки о том, что объект есть структурированное множество с точностью до изоморфизма, тоже не верен; когда объектом становится категория, место изоморфизмов занимают эквивалентности. Это чрезвычайно радикальная инновация, которая продолжается в нынешнем распространении таких вещей, как, скажем, A_∞-категории и т.д.

Мы начинаем понимать, что объекты являются математическими объектами, морфизмы между объектами являются математическими объектами, функторы являются математическими объектами. Но среди математических объектов нет равенств (за исключением тождественного — каждый объект равен самому себе), есть только эквивалентности. Эквивалентность тоже является математическим объектом. Поэтому между эквивалентностями нет равенств, кроме тривиального — каждая эквивалентность равна самой себе. Всё остальное является эквивалентностями между эквивалентностями. Вместо привычного для бурбакиста мира структурированных множеств (конкретных объектов) возникает бесконечно ступенчатый иерархический мир объектов с эквивалентностями, с эквивалентностями между эквивалентностями и т.д., и т.д. Этот мир чрезвычайно трудно зааксиоматизировать.

Толстенная рукопись Гротендика "В поисках стэков" (или даже лучше "В погоне за стэками" посвящена фиксации его каждодневных попыток (в его уже более поздней стадии, когда Гротендик уже был психически нездоров), как-то математически записать это новое видение математического мира, которое заменяет исходный канторовский мир. Это ему не удалось. Не вполне понятно, может ли такой проект быть действительно хоть на время завершенным или он представляет собой только движущую силу и предвкушение того, как мы станем думать о математике в ближайшие годы. Но если канторовские идеи были как-то превзойдены в XX веке, то, как мне кажется, именно этим новым категорным видением того, как математика структурирована или должна быть структурирована в послеканторовское время. И как ни странно, именно эти вещи используются в текущем периоде взаимодействия с математической физикой, чего, в общем, никто кроме самого Гротендика не ожидал; а Гротендик ожидал исключительно из гордыни, потому что физики он тоже не знал и не понимал. Но он был уверен, что его способ видеть, скажем, математическое пространство, то, что раньше себе мы воображали, как многообразие или что-нибудь в этом роде, видеть его, как сайт или как топос — он был уверен, что это доставляет новые способы формулирования нашего понимания физического мира; и он оказался прав.

В каком-то смысле слова, может быть, я бы хотел закончить тем, что и Кантор оказался прав после 150 лет развития его теории. Всё, спасибо.