1. Фейгин Б.Л. Конформные теории поля

20 апреля 2000

Речь пойдёт о таком новом алгебраическом объекте, как Vertex Operator Algebra (VOA). С теорией представлений таких алгебр связано много достижений в математике последнего времени. В определённом смысле примыкающими к ним можно назвать и теорию узлов, и даже деформационное квантование Концевича — оно может быть перетолковано как некое утверждение такого типа. Лет 5 назад было популярно изучение связи вертексных операторных алгебр с конечными простыми группами.

Оказалось, что вникание в структуру этого алгебраического объекта приводит к продвижению во многих разнообразных вопросах и теориях.

1.1. Алгебра

Теперь, после краткого введения, я скажу, о каком алгебраическом объекте идёт речь. Аккуратного определения мне дать не удастся; к этому я и стремиться не буду. Я дам только «определение–описание» вертексных операторных алгебр. Прежде всего это алгебра (над $\mathbb{C}$). Эту алгебру удобно описывать, имея одновременно её представление в градуированном пространстве $W = \oplus W_i$, $i \in \mathbb{Z}$, $i \geq 0$. На этом пространстве действуют элементы, порождающие алгебру. Предполагается, что есть набор индексов α и каждому α сопоставлен формальный символ (производящая функция)

$$a^\alpha(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^\alpha z^{-n}.$$

Это означает, что на пространстве W действуют операторы $a_n^\alpha : W_i \to W_{i+n}$; другими словами, оператор a_n^α имеет градуировку n. Эти операторы a_n^α являются элементами алгебры; больше об алгебре пока ничего не сказано.

Если есть два индекса α и β, то (по крайней мере формально) можно записать произведение

$$a^\alpha(z_1)a^\beta(z_2) = \sum_{n_1,n_2} a_{n_1}^\alpha a_{n_2}^\beta z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}.$$

Буква z должна иметь содержательный смысл. Посмотрим, как устроены матричные элементы операторов $a^\alpha(z_1)a^\beta(z_2)$. Для этого нужно фиксировать вектор $w \in W$ и ковектор $\breve{w} \in W^*$ и рассмотреть число $\langle \breve{w}, a^\alpha(z_1)a^\beta(z_2)w\rangle$ (матричный элемент); физики обычно используют обозначение $\langle \breve{w}|a^\alpha(z_1)a^\beta(z_2)|w\rangle$. Матричный элемент является формальным рядом от z_1 и z_2. Основное требование состоит в том, чтобы это был не просто какой-то формальный ряд, а разложение в ряд некоторой функции $F^{\alpha,\beta}(z_1,z_2)$ (эта функция зависит от w и $\breve{w}$). Эта функция должна (при любых w и $\breve{w}$) удовлетворять следующим условиям:

- F — рациональная функция от z_1 и z_2, у которой полюс может быть только при $z_1 = z_2$ (в большинстве примеров порядок полюса ограничен некой константой, не зависящей от w и $\breve{w}$);
- $F^{\alpha,\beta}(z_1, z_2) = F^{\beta,\alpha}(z_2, z_1)$ («локальность» или «коммутативность»; иногда допускается косокоммутативность).

Обсудим, что такое локальность (коммутативность). Для простоты рассмотрим $F^{\alpha,\alpha}(z_1, z_2)$. Вместо $a^\alpha(z)$ я буду писать $a(z)$. Напомню, что $a(z) = \sum a_n z^{-n}$. Предположим, что для любых w и $\breve{w}$ у функции F полюса нет. Тогда из локальности (коммутативности) и того, что в данном случае проблемы разложения в ряд не существует), следует, что операторы a_n и a_m коммутируют. Если же полюс есть, то эти операторы коммутировать не будут; что будет происходить в этом случае, я скажу чуть позже.

Давайте усилим требование: предположим, что для любых w и $\breve{w}$ не только нет полюса, но и функция $F(z_1, z_2)$ обращается в нуль при $z_1 = z_2$. Из симметричности этой функции следует, что она делится на $(z_1 - z_2)^2$. Из этого легко вывести тождество $a^2(z) = 0$. Это означает, что операторы a_n и a_m не только коммутируют, но и выполняется равенство $\sum_{n_1+n_2=m} a_{n_1} a_{n_2} = 0$, которое можно рассматривать как усиление коммутативности. Написанную бесконечную сумму нужно понимать следующим образом. Пространство $W = W_0 + W_1 + \cdots$ градуированное, а оператор a_n повышает градуировку на n. Поэтому если применить оператор $\sum_{n_1+n_2=m} a_{n_1} a_{n_2} = 0$ к вектору из W_i, то сумма будет конечная.

Если потребовать, чтобы функция $F(z_1, z_2)$ на диагонали обращалась в нуль с кратностью 4 (для любых векторов w и $\breve{w}$), то к написанному выше соотношению прибавится ещё соотношение $\sum_{n_1+n_2=m} a_{n_1} a_{n_2} n_1 n_2 = 0$.

Более сложный случай, подробности которого мне придётся пропустить, возникает, когда функция $F(z_1, z_2)$ при $z_1 = z_2$ имеет полюс не выше 2-го порядка (для любых векторов w и $\breve{w}$). В этом случае можно доказать, что существует система операторов b_i (иначе говоря, существует $b(z) = \sum b_i z^{-i}$), для которых выполняется условие

$$[a_{n_1}, a_{n_2}] = (n_1 - n_2) b_{n_1+n_2}.$$

И это условие равносильно наличию полюса не выше 2-го порядка. Если допустить наличие полюса 4-го порядка, то получится более сложная формула; зависимость от индексов будет не линейной, а 3-й степени.

Пример. *Алгебра Вирасоро — это алгебра Ли с образующими C и $\{L_i\}$, $i \in \mathbb{Z}$. Коммутаторы такие:*

$$[L_i, L_j] = (j - i) L_{i+j} + \delta_{i+j,0} \frac{i^3 - i}{12} C, \quad [L_i, C] = 0.$$

Чтобы привести это к той ситуации, которую я описывал, нужно сделать так. В качестве пространства W нужно взять модуль Верма. Иначе говоря, это пространство, в котором есть вектор v и на него образующие алгебры Вирасоро действуют так: $L_i v = 0$ при $i > 0$; $L_0 v = hv$, где h — число; $Cv = cv$, где c — число. Тогда модуль Верма порождён действием на v остальных образующих:

$$W = \mathbb{C}[L_{-1}, L_{-2}, \ldots] = W_0 + W_{-1} + W_{-2} + \cdots$$

Эти стандартные соглашения о нумерации противоположны тем, которые были приняты в начале лекции. Но это не существенно.

На таком пространстве действуют операторы L_i. Поэтому можно образовать величину $T(z) = \sum L_i z^{-i}$ и вычислить матричные элементы $\langle \breve{w} | T(z_1) T(z_2) | w \rangle$. В результате получится, что функция $F(z_1, z_2)$ имеет полюс 4-го порядка:

$$F(z_1, z_2) = (z_1 - z_2)^{-4} G(z_1, z_2).$$

Функция $G(z_1, z_2)$ не имеет особенностей на диагонали. Более того, $G(z, z)$ — константа (которая зависит от w и $\breve{w}$).

Пример. *Пусть есть $a(z)$ и для любых w и $\breve{w}$ соответствующая функция $F(z_1, z_2)$ имеет полюс не выше 2-го порядка. Тогда $\langle \breve{w} | a(z_1) a(z_2) a(z_3) | w \rangle$ — рациональная функция*

$$H(z_1, z_2, z_3) = \prod (z_i - z_j)^{-2} G(z_1, z_2, z_3),$$

где функция G симметрична и полюсов не имеет.

Имеет место следующий факт. Пусть есть $\sum a_n z^{-n}$ и мы рассматриваем алгебру, порождённую элементами $\{a_n\}$. Предположим, что существуют b_i, для которых $[a_n, a_m] = (n - m) b_{n+m}$. Из этого вытекает, что образующие a_n удовлетворяют квадратичным соотношениям

$$\frac{[a_n, a_m]}{n - m} - \frac{[a_{n+1}, a_{m-1}]}{n - m + 2} = 0.$$

Предположим, что a_i включаются в алгебру Ли гамильтоновых векторных полей на плоскости. Напомню, что её элементы — это функции $H(p, q)$; коммутатор устроен следующим образом:

$$[H_1(p, q), H_2(p, q)] = \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{\partial H_2}{\partial q} - \frac{\partial H_1}{\partial q} \frac{\partial H_2}{\partial p}.$$

Я буду рассматривать подпространство $\mathcal{L}$, состоящее из функций вида $p^i f(q)$, где $i \geq 2$, $f(q)$ — полином Лорана от q. $\mathcal{L}$ — алгебра Ли, она порождается своим подпространством $\{p^2 f(q)\}$.

Пусть имеется представление алгебры Ли $\mathcal{L}$ в некотором пространстве W. Пусть, далее, $a_i = p^2 q^i$. Ещё есть такие требования: $W = W_0 + W_1 + W_2 + \cdots$ и $a_i : W_j \to W_{i+j}$. В этом пространстве можно вычислить матричный элемент

$$F(z_1, z_2, z_3) = \langle \breve{w} | a(z_1) a(z_2) a(z_3) | w \rangle.$$

Эта функция имеет вид

$$F(z_1, z_2, z_3) = \prod (z_i - z_j)^{-2} G(z_1, z_2, z_3),$$

где $G(z_1, z_2, z_3)$ — симметрический полином (Лорана) от z_1, z_2, z_3, причём $G(z, z, z) = 0$. Кроме того, G удовлетворяет ещё одному условию (см. вторую часть $(2')$).

Алгебра Ли $\mathcal{L}$ своими свойствами напоминает максимальные нильпотентные подалгебры в алгебрах Каца–Муди. В частности, она может быть описана как алгебра Ли, порождённая образующими $\{a_i\}$, удовлетворяющими некоторому аналогу серровских соотношений. Эти соотношения выглядят так:

(1) Пусть $i + j = k + l$, тогда $(l - k)[a_i, a_j] = (j - i)[a_k, a_l]$ — квадратичные соотношения.

(2) Пусть $i + j + k = i_1 + j_1 + k_1$, тогда

$$(i_1 + j_1 - 2k_1)(j_1 - i_1) \cdot [a_k, [a_i, a_j]] = (i + j - 2k)(j - i) \cdot [a_{k_1}, [a_{i_1}, a_{j_1}]]$$

— кубические соотношения.

Напомним, что подобным образом описывается максимальная нильпотентная подалгебра в $\mathfrak{gl}(n)$ — посредством квадратичных и кубических серровских соотношений.

В терминах матричных элементов (или, как принято говорить, «корреляционных функций») соотношения (1) и (2) переписываются так:

$(1')$ $\langle \check{w} | a(z_1) a(z_2) | w \rangle = (z_1 - z_2)^{-2} G(z_1, z_2)$, где $G(z_1, z_2)$ — симметрический полином Лорана.

$(2')$ $\langle \check{w} | a(z_1) a(z_2) a(z_3) | w \rangle = (z_1 - z_2)^2 (z_2 - z_3)^2 (z_1 - z_3)^2 F(z_1, z_2, z_3)$, где $F(z_1, z_2, z_3)$ — симметрический полином Лорана, такой что: a) $F(t, t, t) = 0$, b) $2U'_x(t, t) - U'_y(t, t) = 0$, где $U(x, y) = \frac{F(x,x,y)}{(x-y)^2}$.

Универсальная обёртывающая алгебра $U(\mathcal{L})$ алгебры Ли $\mathcal{L}$ может быть описана «алгебраически» — то есть посредством образующих и соотношений (1) и (2). С другой стороны, $U(\mathcal{L})$ определяет операторную алгебру. Это и означает, что мы описываем $\mathcal{L}$ в терминах аналитических свойств функций $\langle \check{w} | a(z_1) a(z_2) \cdots a(z_n) | w \rangle$. Вертексная алгебра, отвечающая $\mathcal{L}$, может быть продеформирована (при этом деформируются соотношения (1) и (2) или $(1')$ и $(2')$). В результате получаются так называемые W-алгебры — новый математический объект, интенсивно изучаемый в последнее время. Деформированные $(1')$ и $(2')$ — это как бы серровские соотношения для W-алгебр.

Имеется целая наука о попытках описать все (в разумном классе) вертексные алгебры, порождённые одним семейством операторов $a(z)$, и имеется очень много красивых примеров.

Проблема с вертексными алгебрами вот в чём. Если разбирать примеры, то ясно, о чём идёт речь. Но если попробовать написать систему аксиом, то получится целая книга. И такие книги существуют.

1.2. Геометрия

Я уже сказал, что теория вертексных алгебр — наука алгебраическая, похожая на теорию представлений алгебр Ли. А ещё есть геометрия. Геометрия возникает из-за того, что в алгебре соотношения и всё остальное записывается в терминах генераторов $a(z)$, зависящих от переменной z. По этим алгебрам можно строить различные объекты, в которых z — точка алгебраической кривой.

Если есть кривая, то на ней можно взять любую точку и рассмотреть её окрестность (формальную) и считать, что z — элемент формальной окрестности. Все явления по этому z разложены в ряд. Поэтому если есть какая-то вертексная операторная алгебра и её представление, то это представление можно поместить в точку z, считая, что вертексная операторная алгебра выражена через z. Это похоже на стандартные конструкции теории автоморфных форм: в каждой точке алгебраической кривой сидит некоторое пространство, и эти пространства как-то друг с другом взаимодействуют.

Так можно построить некоторое пространство, являющееся аналогом пространства автоморфных форм. Я сейчас приведу некую простую алгебро–геометрическую конструкцию, дающую алгебраическое многообразие. Пусть $\mathcal{E}$ — алгебраическая кривая, ν — двумерное расслоение на $\mathcal{E}$. Предположим, что пространство сечений $H^0(\nu)$ достаточно велико, а $H^1(\nu) = 0$. Пусть M — двумерное многообразие прямых в слоях расслоения ν (линейчатая поверхность). Тогда имеется расслоение $M \to \mathcal{E}$ со слоем $\mathbb{C}P^1$. При этом на M есть линейное расслоение μ, для которого

$$H^0(\mu)|_M \cong H^0(\nu)|_{\mathcal{E}}.$$

Следующую конструкцию можно провести для любого многообразия M и линейного расслоения μ. Я буду строить коммутативную градуированную алгебру. Пусть $N = \dim H^0(\mu)$. Рассмотрим $\underbrace{\mu \otimes \mu \otimes \cdots \otimes \mu}_{N}$ — линейное расслоение на $\underbrace{M \times \cdots \times M}_{N}$. В той алгебре, которая строится, степени 0 соответствует $\mathbb{C}$; степени 1 тоже $\mathbb{C}$ (единственное кососимметрическое сечение расслоения $\mu \otimes \cdots \otimes \mu$, т.е. единственное сечение внешней степени). Далее каждому n сопоставляется пространство сечений расслоения $\mu^n \otimes \cdots \otimes \mu^n$ на $M \times \cdots \times M$, которые имеют n-кратный нуль на подмногообразиях $(m_1, \ldots, m_N)$: $m_i = m_j$ (т.е. на диагоналях); кроме того, сечения должны быть кососимметрическими при нечётном n и симметрическими при чётном n.

Каждому n сопоставлено пространство S_n. Имеется произведение $S_n \otimes S_m \to S_{n+m}$ (сечения поточечно перемножаются). В результате получается алгебра $\{\oplus S_i\}$. Меня интересует проективный спектр этой алгебры. Этот объект очень близок к пространству модулей SL_2-расслоений на кривой $\mathcal{E}$.

Имеется замечательный способ вычисления размерности пространства S_k в терминах так называемой алгебры Верлинде. Пусть A — кольцо конечномерных представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ — базис в A (ε_s отвечает $(s+1)$-мерному неприводимому представлению). Алгебра Верлинде для $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ (уровня k) — это фактор $A_k = A/(A \cdot \varepsilon_{k+1})$. Введём также групповую алгебру C_{2k} группы $\mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}$, и пусть $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{2k-1}$ — естественный базис в ней: ν_0 — единица в $\mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}$, ν_1 — образующая. Введём в алгебре $A_k \otimes C_{2k}$ $\mathbb{Z}_2$-градуировку, положив $\deg(\varepsilon_0 \otimes \nu_1) = 1$ и $\deg(\varepsilon_1 \otimes \nu_0) = 1$. Пусть $(A_k \otimes C_{2k})^0$ — подалгебра в $A_k \otimes C_{2k}$, состоящая из элементов градуировки нуль. Элемент $\varepsilon_{k+1} \otimes \nu_k$ имеет порядок 2 в $(A_k \otimes C_{2k})^0$. Положим

$$V = (A_k \otimes C_{2k})^0 / (A_k \otimes C_{2k})^0 (\varepsilon_k \otimes \nu_k - 1).$$

V — алгебра, она — фактор $(A_k \otimes C_{2k})^0$ по идеалу, порождённому $\varepsilon_k \otimes \nu_k - 1$. Базис в V — представители элементов $\varepsilon_i \otimes \nu_j$, где $i+j$ чётно и $i < k$. Размерность пространства S_k — вычисляется следующим образом. Пусть g — род кривой $\mathcal{E}$,

$$\left(\sum (\varepsilon_i \otimes \nu_j)^2\right)^g = \sum a_g(i,j) \cdot \varepsilon_i \otimes \nu_j.$$

Здесь $\varepsilon_i \otimes \nu_j$ — базис в V. То есть мы g-ю степень суммы квадратов базисных элементов в V разлагаем по образующим. Оказывается, что коэффициент $a_g(0,0)$ равен размерности пространства S_k.

Этот чисто алгебро-геометрический результат получается посредством применения теории VOA. А именно, в теории VOA имеется так называемый «модулярный функтор». Этот функтор относит алгебраической кривой и операторной алгебре некоторое пространство. Наше пространство сечений S_k получается как раз таким способом (из некой вертексной алгебры, описать которую нет возможности).

Это простейший пример, когда работает следующий подход. Имеется семейство вертексных операторных алгебр (похожих на то, что я объяснял раньше), зависящих от параметра i. Каждая из этих алгебр порождает пространство матричных элементов некоторых представлений. Они появляются примерно так же, как функции $F(z_1, \dots, z_n)$, но только теперь z имеют более сложную природу. Для этих пространств можно рассмотреть сечения. Возникают объекты, которые простым и естественным образом можно перемножать и брать проективный спектр. В результате получается алгебраическое многообразие, которое близко к пространству модулей каких-то интересных объектов. Есть предположение, что все (или во всяком случае многие) пространства модулей интересных объектов могут быть описаны такого сорта манипуляциями. Известные конструкции касаются, скорее, пространства модулей расслоений. Одно из самых интересных пространств модулей — пространство модулей инстантонов. Это — комплексное многообразие. Но те его описания, которые мне известны, не описывают его как проективный спектр чего-нибудь. Было бы очень интересно найти такого сорта алгебраическое описание было бы очень интересно (понять, какие вертексные операторные алгебры вовлечены в игру, можно).

Ситуация даже более интересна. Алгебраической кривой $\mathcal{E}$ можно сопоставить пространство $\mathrm{Mod}(\mathrm{SL}_2, \mathcal{E})$ (пространство модулей SL_2-расслоений на этой кривой). Этот пример исследован настолько хорошо, что по таким алгебро–геометрическим данным можно найти вертексные операторные алгебры, из которых это берётся. Таким образом, тут до некоторой степени есть полная обратимость. Вертексных операторных алгебр очень много; пространств модулей тоже. В этой науке наиболее интересен вопрос о взаимоотношениях между ними.