1. Манин Ю.И. Некоммутативная геометрия и квантовые тэта–функции

29 мая 2000

В Независимом университете я читаю лекцию уже не впервые. В этот раз я хочу рассказать о своей очередной попытке понять, что может называться квантованной версией абелевых многообразий. Вся история квантования математических объектов, в отличие от физических, занимала добрую половину прошедшего века. Событием, происшедшем уже на моей памяти, было изобретение квантовых групп. Вероятно, многие из вас знают, что это такое. Но я вкратце напомню определение квантовой группы $\mathrm{GL}(2)$.

Мы начинаем с квантования пространства матриц $\mathrm{M}(2)$. В обычной интерпретации это пространство состоит из матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. На этом пространстве a, b, c, d — функции (коммутирующие координаты). Если k — основное поле, то $\mathrm{M}(2)$ можно рассматривать как $\operatorname{Spec} k[a,b,c,d]$ — спектр кольца многочленов от четырёх переменных, которые объединяются в матрицы. Пространство квантовых матриц $\mathrm{M}_q(2)$ представлено чем-то, что условно можно назвать «некоммутативным спектром». Это — объект, двойственный кольцу $k\langle a,b,c,d\rangle/(*)$. Здесь имеется в виду факторкольцо кольца, свободно порождённого над k переменными a, b, c, d, по идеалу, порождённому следующими соотношениями. Будем считать, что $a \to b$ обозначает соотношение $ab = q^{-1}ba$, где q — некоторый элемент основного поля (параметр квантования). Рассмотрим четыре стрелки: $\begin{array}{ccc} a & \to & b \\ \downarrow & & \downarrow \\ c & \to & d \end{array}$. Каждой из этих четырёх стрелок соответствует соотношение указанного выше вида. Кроме того, будем считать, что переменные b и c коммутируют: $bc = cb$. Имеется также более сложное соотношение $ad - da = (q^{-1} - q)bc$.

Некоммутативное кольцо, которое получается при факторизации по такому идеалу соотношений, объявляется кольцом некоммутативных функций на квантованном пространстве матриц. Это кольцо обозначают $F\big(\mathrm{M}_q(2)\big)$.

Здесь присутствует идея о том, что квантование, в частности, включает замену коммутирующих наблюдаемых на некоммутирующие. Но главное, что оправдывает введение такого определения, состоит в том, что сохраняются некоторые основные свойства кольца матриц.

Обычные матрицы образуют полугруппу: если взять две матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ с элементами из коммутативного кольца, то их произведение тоже будет матрицей с элементами из того же коммутативного кольца. Верно ли такое утверждение для квантованных матриц? Нет, это неверно. Если взять произведение двух матриц, элементы которых удовлетворяют указанным выше коммутационным соотношениям, то его элементы уже не обязательно будут удовлетворять этим коммутационным соотношениям. Однако эти коммутационные соотношения будет выполняться в том случае, когда элементы a, b, c, d попарно коммутируют с элементами a', b', c', d'.

Обычно это говорят на более формальном языке. Рассмотрим диагональное отображение (коумножение)

$$\Delta : F\big(\mathrm{M}_q(2)\big) \to F\big(\mathrm{M}_q(2)\big) \otimes F\big(\mathrm{M}_q(2)\big),$$

при котором матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ переходит в свой тензорный квадрат $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Это отображение является гомоморфизмом колец. Есть также операция умножения

$$\mu : F\big(\mathrm{M}_q(2)\big) \otimes F\big(\mathrm{M}_q(2)\big) \to F\big(\mathrm{M}_q(2)\big).$$

Вместе операции Δ и μ образуют структуру, которую называют *биалгеброй*.

Это ещё не матричная группа, поскольку есть вырожденные квантованные матрицы. Чтобы получить матричную группу, нужно написать квантовый детерминант и формально его обратить. Тогда получится некоммутативное кольцо, которое является кольцом функций на матричной группе. Это очень интересный объект, изобретение которого привело к осознанию того, что огромные части классической математики допускают квантованные варианты (что бы это ни означало), и эти квантованные варианты заслуживают изучения.

Эта деятельность превратилась в одну из глав некоммутативной геометрии. Некоммутативная геометрия сейчас представляет собой бурно развивающуюся область математики, состоящую из нескольких плохо взаимодействующих глав. Мы не вполне понимаем, что такое некоммутативная геометрия. Но несомненно, что квантовые группы являются одной из её глав и составляют один пакет основных идей некоммутативной геометрии. Позже я скажу немножко больше о философии. Сейчас я перейду к конкретной проблеме квантования абелевых многообразий, а в конце лекции расскажу о конкурирующих и взаимодействующих идеях, которые сейчас обсуждаются в некоммутативной геометрии.

Нужно ещё сказать, что все коммутационные соотношения для матричных элементов $\mathrm{M}_q(2)$ (которые были известны много лет назад) можно получить из более простой идеи. А именно, рассмотрим квантованную плоскость, в которой переменные x и y удовлетворяют основному хорошо известному соотношению $xy = qyx$. Рассмотрим, далее, матрицы с некоммутирующими коэффициентами, для которых

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

где x' и y' удовлетворяют тому же самому коммутационному соотношению $x'y' = qy'x'$. Иными словами, рассматриваются матрицы как бы автоморфизмов квантованной плоскости. Тогда из предположения, что a, b, c и d коммутируют с x и y, вытекают коммутационные соотношения. Таким образом мы получаем чрезвычайно наглядное выражение того, что квантовая группа, не будучи группой, тем не менее является описанием симметрий нового вида.

Если рассматривать матрицы с коэффициентами из коммутативного кольца, то обыкновенных симметрий очень мало — только диагональные матрицы и перестановки. А вот квантовых симметрий ровно столько, сколько и классических. Квантовые группы — это симметрийный объект.

Известно, что в алгебраической геометрии есть два основных класса групп. Это линейные алгебраические группы, реализуемые как подгруппы в группе матриц, задаваемые системами алгебраических уравнений, и абелевы многообразия, которые являются коммутативными, но зато не аффинными. Абелевы многообразия — это интересные алгебраические многообразия, которые вкладываются в проективное пространство. Простейшими примерами абелевых многообразий являются неособые кубические кривые на плоскости. На абелевых многообразиях есть групповые законы, но все эти законы коммутативные.

Естественный вопрос о том, нельзя ли проквантовать абелевы многообразия, стоит давно. Я могу сразу сказать, что окончательный ответ на этот вопрос не известен; не известно правильное определение. Я сделал попытку дать определение квантового абелева многообразия 10 лет назад, а сейчас вернулся к ней с некоторыми добавлениями и усовершенствованиями.

При квантовании алгебраических групп понятен и общепринят, по крайней мере, ответ на вопрос о том, в какую вселенную попадают квантованные линейные алгебраические группы. Они попадают во вселенную алгебр Хопфа. Алгебра Хопфа A — это линейное пространство над полем k с ассоциативным умножением μ и коумножением Δ. Кроме того есть отображение $A \to k$, которое на групповом языке означает вычисление значения в единице (аугментация); есть также вложение постоянных функций $k \to A$. Наконец, есть инволюция $i : A \to A$, которой на группе соответствует переход от элемента b к элементу b^{-1} (на языке алгебр Хопфа эту инволюцию называют *антиподом*). В результате получаем следующую диаграмму отображений:

$$\begin{tikzcd} & k \arrow[d] & \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \circlearrowleft \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & A \otimes A \\ & k & \end{tikzcd}$$

Известно, что квантовые алгебраические группы суть некоторые алгебры Хопфа. Вопрос только в том, как в мире алгебр Хопфа выбрать те, которые близки к алгебрам функций на линейных группах.

Если говорить о квантованных абелевых многообразиях, то совершенно непонятно, в какой мир они должны попадать. Это определённо не алгебры Хопфа по той банальной причине, что поскольку абелево многообразие проективное, а не аффинное, то у него нет кольца алгебраических функций и, соответственно, нет естественно связанной с ним коммутативной и кокоммутативной алгебры Хопфа. Поэтому уже обыкновенное абелево многообразие в таком виде нельзя представить.

Много лет назад Дэвид Мамфорд в замечательной работе «Уравнения, определяющие абелевы многообразия» занимался проблемой, куда попадают в алгебраическом смысле абелевы многообразия самые обыкновенные. Он рассуждал примерно так. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторое абелево многообразие. Если у него нет аффинного кольца функций, то во всяком случае есть какое-нибудь проективное. Добавим какой-нибудь очень обильный пучок L, рассмотрим все его степени и возьмём однородное кольцо, которое представляет это абелево многообразие (т.е. проективный спектр этого однородного кольца является данным абелевым многообразием):

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(\mathcal{A}, L^{\boxtimes n}).$$

Обозначим полученное кольцо $F(\mathcal{A}, L)$. Может быть оно является алгеброй Хопфа? Нет, это кольцо тоже не алгебра Хопфа. Оно не является алгеброй Хопфа потому, что если написать отображение умножения (сложения) в группе $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \xrightarrow{m} \mathcal{A}$, заданное формулой $(x, y) \mapsto x + y$, и потом применить контравариантное отображение в кольцо однородных функций на абелевом многообразии, то его нельзя будет связать с самим собой. Неверно, что m^* отображает L в $L \boxtimes L$. Это неверно потому, что $m^*(L) \neq L \boxtimes L$. Когда вы переносите обратимый пучок с помощью операции сложения, вы получаете нечто, не выражающееся через этот обратимый пучок.

Идея Мамфорда (точнее говоря, он реализовал идею, известную раньше) состояла в том, что вместо отображения чистого сложения нужно взять комбинированное отображение $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \xrightarrow{M} \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, заданное формулой $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$. Тогда $M^*(L \boxtimes L) = L^2 \boxtimes L^2$ (здесь тензорные произведения внешние). Таким образом, M^* индуцирует некое отображение, которое нужно построить, из этого кольца. Однако получившаяся структура не будет алгеброй Хопфа; она будет чем-то другим. Это что-то другое до сих пор не аксиоматизировано. Мамфорд изучил получившуюся структуру (диаграммы градуированных колец) с такой степенью подробности, что он сумел в достаточно явном виде написать координаты на пространстве модулей этих структур и уравнения, которые их выделяют; т.е. он получил алгебраическое описание пространства модулей абелевых многообразий и самих абелевых многообразий, живущих над точками пространства модулей. Но то, что он получил, есть настолько конкретное описание, что оно не вкладывается ни в какую бóльшую вселенную. Поэтому опять непонятно, как это квантовать.

Когда я впервые стал задумываться об этом сюжете, моя идея была такая. Рассмотрим абелево многообразие $\mathcal{A}^d$. Временно будем работать над полем комплексных чисел (значительная часть последующего будет применима к полным нормированным полям типа поля p-адических чисел). Группа комплексных точек $\mathcal{A}^d(\mathbb{C})$ — это вещественный $2d$-мерный тор. У него есть универсальное накрытие и промежуточное накрытие:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^{2d} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{*d} & \longrightarrow & \mathcal{A}^d(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{*d}/B \\ \bigcup & & \bigcup & & \\ \Omega & & B & & \end{array}$$

Здесь Ω — группа периодов, B — её образ, который является группой мультипликативных периодов.

В подходящем базисе группа периодов может быть записана как матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tau_{11} & \dots & \tau_{1d} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tau_{d1} & \dots & \tau_{dd} \end{pmatrix}$. В этом базисе получаем нечто вроде экспоненциального отображения: как обычно алгебра Ли отображается на соответствующую группу Ли; возникает комплексная структура. Таким образом, можно выбрать мультипликативную униформизацию, которая представляет комплексный тор в виде фактора произведения нескольких комплексных мультипликативных групп по группе мультипликативных периодов. Этот фактор — $\mathbb{C}$-точки алгебраического тора. Выбор группы периодов в естественном смысле однозначен, тогда как выбор того, что получается на полдороге, неоднозначен. Но этот выбор часто бывает существен при исследовании абелевых многообразий; я всегда буду его осуществлять.

Самая классическая версия мультипликативной униформизации — представление эллиптической кривой в виде фактора

$$E = \mathbb{C}^*/(q^{\mathbb{Z}}), \;\; q = e^{2\pi i\tau}.$$

Если на абелевом многообразии $\mathcal{A}$ дополнительно выделить обратимый пучок L, то на алгебраическом уровне у него есть конечномерное пространство сечений $\Gamma(L)$, а на уровне униформизации сечения превращаются в пространство тэта–функций данного типа. Это — комплексно аналитические функции на универсальном накрытии, которые почти периодичны относительно сдвигов на Ω (точный характер периодичности я напомню позже). В точности периодичными эти функции быть не могут, потому что тогда они были бы ограничены на всём пространстве. При сдвиге на период они умножаются на некоторый экспоненциальный множитель.

Как квантовать алгебраические торы, имеется давно известный стандартный рецепт. Их нужно квантовать, слегка обобщая соотношение $xy = q^{-1}yx$. Моя идея состояла в том, что можно попробовать построить аналог абелева многообразия, воображая его себе как фактор квантованного тора по мультипликативной решётке периодов, и строя алгебраические структуры, которые наполняют это воображение алгебраическим содержанием, непосредственно из построения квантовой версии соответствующего пространства тэта-функций. Ближайшая часть лекции будет посвящена описанию деталей этой конструкции. А потом начну философствовать и объяснять, что в этой конструкции хорошо и что плохо.

1.1. Категория некоммутативных торов

Пусть K — основное поле (в самой содержательной части конструкции это $\mathbb{C}$ или $\mathbb{Q}_p$ или какое-то другое полное нормированное поле). Некоторое время можно работать с произвольным полем нулевой характеристики.

Пусть (H, α) — пара, состоящая из свободной абелевой группы H конечного ранга и кососимметрического спаривания $\alpha : H \times H \to K^*$ (спаривание не в аддитивной группе, а в мультипликативной, — тут присутствуют экспоненты). Формально это записывается так:

$$\begin{aligned} \alpha(g,h) &= \alpha(h,g)^{-1}, \\ \alpha(h_1+h_2,g) &= \alpha(h_1,g)\alpha(h_2,g). \end{aligned}$$

Отметим, что хотя спаривание антисимметрично, оно может случайно оказаться и симметричным, если все значения α равны ± 1. С этим связан ряд тонкостей, о которых нужно не забывать. По модулю ± 1 спаривание действительно антисимметрично.

Характер $\varepsilon(h) = \alpha(h,h)$ принимает значения ± 1, хотя и выглядит как квадратичная функция.

Морфизм таких пар $(H_1, \alpha_1) \to (H_2, \alpha_2)$ — это гомоморфизм групп $f : H_1 \to H_2$, для которого $\alpha_2^2\big(f(h), f(g)\big) = \alpha_1^2(h,g)$. У морфизма есть характеристика (билинейная форма)

$$\alpha_2\big(f(h), f(g)\big)^{-1}\alpha_1(h,g) = \varepsilon_f(h,g) \in \{\pm 1\}.$$

Некоммутативным, или *квантовым*, тором с группой характеров (H, α) называют нечто, представленное кольцом функций. Функции я рассматриваю трёх родов:

- Алгебраические $Al(H,\alpha) = \bigoplus_{h\in H} Ke(h)$, т.е. это — линейное пространство, натянутое на такие формальных символов, а умножение задаётся формулой $e(h)e(g) = \alpha(h,g)e(h+g)$[1].

[1]Здесь e относится к разным H и α. Если мне нужно будет подчеркнуть, к каким именно, я буду писать более подробно $e_{H,\alpha}$. Например, правила коммутации зависят от H и α

- Формальные $Af(H,\alpha) = \prod_{h\in H} Ke(h)$; они не образуют кольца, но образуют модуль над алгебраическими функциями.

- Аналитические
$$An(H,\alpha) = \left\{ \sum a_h e(h) \;\middle|\; a_h \in K, |a_h| = O(\|h\| + 1)^{-N} \;\forall\, N \right\}.$$
Эти функции определены только над полным нормированным полем. Они образуют кольцо, содержат алгебраические функции и содержатся в формальных. Аналитические функции являются модулем над алгебраическими.

Сам тор будем обозначать $T(H,\alpha)$. Торы образуют категорию, дуальную категории функций. На этой лекции — дуальную категории алгебраических функций Al. Другое понятие получится, если взять формальные или аналитические функции. Морфизм торов $T(H_2,\alpha_2) \to T(H_1,\alpha_1)$ — это то же самое, что обратный морфизм колец алгебраических функций
$$F^* : Al(H_1,\alpha_1) \to Al(H_2,\alpha_2).$$

Следующее простое предложение показывает, что морфизмы таких колец тесно связаны с морфизмами характеров.

Предложение. *а) Обратимые элементы в $Al(H,\alpha)$ — это в точности множество $\{ae(h) \mid a \in K^*,\ h \in H\}$.*

б) Для любого морфизма выполняется равенство $F^*\big(e(h)\big) = a_h\big(ef(h)\big)$. При этом $f : H_2 \to H_1$ — гомоморфизм групп характеров, для которого выполняется соотношение
$$a_h a_g a_{h+g}^{-1} = \alpha_1(h,g)\alpha_2^{-1}\big(f(h), f(g)\big). \tag{1}$$
Более того, f — морфизм $(H_2,\alpha_2) \to (H_1,\alpha_1)$.

в) Каждый морфизм торов определяет морфизм групп характеров f, и если фиксировать f, то множество всех морфизмов торов F, проектирующихся в f, либо пусто, либо является главным однородным пространством над гомоморфизмами
$$\mathrm{Hom}(H_1, K^*) = T(H_1, 1)(K).$$
Здесь $T(H_1,1)(K)$ — K-точки обычного коммутативного тора с группой характеров H_1.

Утверждение а) проще всего доказать с помощью того, что любую свободную абелеву группу с конечным числом образующих можно вполне упорядочить так, что сложение совместимо с этим порядком (для этого свободную абелеву группу нужно представить как решётку в $\mathbb{R}^n$ и выбрать гиперплоскость, пересекающую эту решётку только по нулю; всё, что лежит по одну сторону от гиперплоскости, нужно объявить положительным, а всё, что по другую, отрицательным). Теперь уже легко перечислить обратимые элементы в кольце алгебраических функций. действительно, у любого элемента этого кольца есть старший моном и младший. Они никогда не будут совпадать, за исключением того случая, когда этот элемент сам является мономом. При перемножении старшие мономы перемножаются, младшие тоже перемножаются. Стало быть, обратимы только мономы.

Утверждение б) вытекает из а). Равенство $F^*\big(e(h)\big) = a_h\big(ef(h)\big)$ следует из того, что единица переходит в единицу. То, что f — гомоморфизм групп характеров, следует из формулы умножения. Соотношение (1) тоже следует из формулы умножения; на это раз нужно проследить за константами a_h. Левая часть равенства (1) симметрична по g и h, а правая кососимметрична. Поэтому их значения равны ± 1. После возведения в квадрат получим 1. Стало быть, отображение f совместимо с α_1^2 и с α_2^2, т.е. f не просто гомоморфизм групп, а морфизм $(H_2, \alpha_2) \to (H_1, \alpha_1)$.

По каждому морфизму торов мы построили морфизм групп характеров f и получили соотношение, которое должно выполняться, если гомоморфизм групп характеров можно достроить до морфизма торов. Если его вообще можно достроить, то его можно достроить многими разными способами. А именно, можно выбрать произвольное отображение $a_h : H \to K^*$, которое мультипликативно по отношению к h и g. Морфизм торов однозначно определяется выбором этого отображения a_h. Это доказывает в).

1.2. Стандартные морфизмы торов

Понимание того, как устроены морфизмы некоммутативных торов, позволяет построить некоторые стандартные морфизмы торов. Следует отметить, что при нетривиальном α некоммутативный тор сам по себе, вообще говоря, не является группой. Мы избежали упомянутой выше проблемы. У нас нет алгебр Хопфа, связанных с абелевыми многообразиями, и теперь уже нет алгебр Хопфа, связанных с некоммутативными торами: они не суть группы. Абелевы многообразия суть группы. Мы как будто бы теряем на этом обстоятельстве возможность говорить о многих структурных объектах, связанных с абелевыми многообразиями, потому что у нас нет групповых отображений. Тем не менее, морфизмы, которые заменяют соответствующие групповые отображения, есть. Вот список некоторых стандартных морфизмов некоммутативных торов, которые впоследствии переносятся на морфизмы квантованных абелевых многообразий. (Напомню, что сейчас мы находимся на уровне $(\mathbb{C}^*)^d \to \mathcal{A}^d(\mathbb{C})$, т.е. речь идёт об объектах, которые являются, так сказать, полууниверсальными накрывающими или универсальными полунакрывающими; я ещё не ввёл решётку периодов, но скоро введу.)

1) Действие обыкновенного коммутативного тора $T(H, 1)$ на некоммутативном торе $T(H, \alpha)$ с той же самой группой характеров H, но с нетривиальным α. Это действие таково:

$$b \in T(H, 1)(K) \to b^*\big(e(h)\big) = h(b)e(h),$$

где $h(b) = e_{H,1}(h)(b)$.

2) У нас нет сложения, но есть умножение $[n]$ на любое целое число n, правда, меняющее параметр квантования α. Морфизм

$$[n] : T(H, \alpha) \to T(H, \alpha^{n^2})$$

задаётся формулой

$$[n^*]e_{H,\alpha^{n^2}}((h)) = e_{H,\alpha}(nh).$$

3) Есть даже умножение

$$T(H, \alpha) \times T(H, \beta) \xrightarrow{m_{\alpha,\beta}} T(H, \alpha\beta).$$

Оно задаётся формулой

$$m^*_{\alpha,\beta}(e_{H,\alpha\beta}(h)) = e_{H,\alpha}(h) \otimes e_{H,\beta}(h).$$

4) Наконец, есть мамфордовский морфизм

$$T(H \oplus H, \alpha \oplus \alpha) \xrightarrow{M} T(H \oplus H, \alpha^2 \oplus \alpha^2),$$

который в будущем фрагменте теории должен играть основную роль. Он задаётся формулой

$$M^*(e(h, g)) = e(h + g, h - g).$$

То, что некоммутативные торы не являются группами, не означает, что с ними ничего нельзя делать. Есть масса морфизмов, которые являются квантовыми версиями соответствующих классических свойств.

Сейчас я введу решётку периодов. Некоммутативный тор $H(T, \alpha)$ не является группой, но на него действует $T(H, 1)$. Решётка периодов — это дискретная группа автоморфизмов B, которая действует на $H(T, \alpha)$. Морально я хочу построить факторпространство $H(T, \alpha)/B$. В классическом случае можно дополнительно сказать, что я могу взять группу периодов максимального ранга, который может иметь дискретная подгруппа в торе. И даже после этого фактор $(\mathbb{C}^*)^d$ ещё не обязан быть абелевым многообразием. Нужно ещё, чтобы на этом факторе было достаточно много мероморфных функций. В классическом случае существование достаточно многих мероморфных функций эквивалентно существованию достаточно многих тэта-функций. Сначала я буду изучать факторы на весьма формальном уровне, а потом, когда введу тэта-функции, я буду изучать квантовый аналог того, что на факторе имеется достаточно много независимых функций.

Построение факторпространства $H(T, \alpha)/B$ примерно равносильно тому, что берётся одна из версий колец функций — алгебраических Al, формальных Af или аналитических An — и находятся B-инвариантные элементы. В алгебраическом случае B-инвариантных элементов просто нет;

этот случай исключается. В формальном случае нужно говорить не о B-инвариантных функциях (это слишком сильное условие), а о B-ковариантных функциях, которые при сдвигах на B приобретают множитель. Часть теории относится к изучению формальных B-ковариантных функций, а другая часть — к изучению B-ковариантных аналитических функций.

Пусть задан коммутативный тор $T(H,1)$ с решёткой периодов B, которая на данный момент является просто подгруппой точек. Он действует на квантованный тор $T(H,\alpha)$. Я хочу написать формальные функции на квантованном торе, которые удовлетворяют определённому уравнению относительно сдвигов на элементы группы периодов.

Определение 1.1. *Двусторонний мультипликатор для* $\big(T(H,\alpha),B\big)$ — *это система* $\mathcal{L}=\big(h_l,h_r,\psi,(\ ,\ )\big)$, *состоящая из четырёх объектов:*

- *(i) гомоморфизмы групп* $h_l,h_r:B\to H$ *(левый* h *и правый* h*); мне часто будут нужны их сумма и разность* $h^{\pm}=h_l\pm h_r$*; я часто буду писать* $h_l(b)=h_{b,l}$*;*
- *(ii) гомоморфизм групп* $\psi:B\to K^*$*;*
- *(iii) симметрическое скалярное произведение* $(\ ,\ ):B\times B\to K^*$*, но опять же экспоненцированное, со значениями в мультипликативной группе. (Это связано с тем уровнем, на котором мы работаем. На следующем уровне оно становится настоящим скалярным произведением.)*

Эта система должна удовлетворять следующему уравнению связи:

$$h^{-}_{b_2}(b_1)=(b_1,b_2)^2\alpha(h_{b_1,l},h_{b_2,l})\alpha(h_{b_1,r},h_{b_2,r})^{-1}$$

для любых $b_1,b_2\in B$

Определение 1.2. Фактор автоморфности, *отвечающий мультипликатору* $\mathcal{L}$, — *это набор линейных отображений, определённых для каждого элемента* $b\in B$*:*

$$j_{\mathcal{L}}(b):Af(H,\alpha)\to Af(H,\alpha).$$

(Af *можно заменить на* Al *или* An*.) Эти отображения определяются следующим образом:*

$$\Phi\mapsto\psi(b)(b,b)e(h_{b,l})\Phi e(h_{b,r})^{-1}$$

Лемма. *Если* $\mathcal{L}$ *фиксировано, то отображение* $b\mapsto j_\alpha(b)\circ b^*$ — *гомоморфизм групп.*

Таким образом определяется действие группы периодов на пространстве функций любого типа — алгебраических, формальных, аналитических. В частности, можно поставить задачу об описании подпространств, инвариантных относительно действия этой группы. Эта задача решается чистыми вычислениями, которые оправдывают упомянутое выше соотношение. Оно берётся из естественного необходимого условия: сдвиги на периоды, подправленные на фактор автоморфности, должны определять групповое действие. Сам же выбор действия, с неизвестными ψ и e, является довольно примитивным обобщением классического случая. В классическом случае e, конечно, коммутируют между собой, поэтому никакого резона разбивать e на левые и правые нет. Все их можно писать слева. Нет никакого резона вводить что-нибудь кроме h^-, потому что если в классическом варианте записать всё слева, то возникнет только h^-. А множители $\psi(b)$ и (b,b) появляются и в классической версии. Имеется экспоненцированная квадратичная форма от периода и экспоненцированная линейная форма от периода. Они естественным образом сохраняются.

В старом варианте своей статьи 90-го года я поставил только одну экспоненту и написал, что её можно ставить как слева или справа. (Это означает переход к тору с противоположным умножением.) Но так или иначе некоммутативность факторов автоморфности приводит к тому, что тэта-функции нельзя умножать. Потом мне пришло в голову, что тэта-функции можно будет хотя бы частично умножать, если я позволю себе ставить экспоненты с двух сторон.

Определение 1.3. *Формальная тэта-функция с мультипликатором $\mathcal{L}$ — это элемент $\Phi \in Af(H,\alpha)$, который обладает тем свойством, что группа действует на него тривиально, т.е.*

$$b^*(\Phi) = j_{\mathcal{L}}(b)(\Phi) \quad \forall b \in B.$$

В частности, в классическом случае, когда $\alpha = 1$, уравнение становится таким:

$$b^*(\Phi) = \psi(b)(b,b)e(h_b)^{-1}(\Phi).$$

Уравнение связи принимает такой вид: $h^-_{b_2}(b_1) = (b_1, b_2)^2$. Поэтому не нужно даже задавать h^-.

В определение формальных тэта-функций вошли римановы условия симметрии; они оправданы леммой. Теперь я напишу теорему о квантовании римановых условий положительности в версии, которая годится для $\mathbb{C}$ и для $\mathbb{Q}_p$; при специализации она, в частности, даёт обычную теорию Якоби–Тэйта p-адических тэта-функций.

Теорема о квантовании условий положительности. а) *Пусть $\Gamma(\mathcal{L})$ — пространство всех тэта-функций с мультипликатором $\mathcal{L}$. Тогда $\dim \Gamma(\mathcal{L}) = [H : h^-(B)]$.*

б) Пусть основное поле K полное нормированное. Тогда если $[H : h^-(B)] < \infty$, $\ln |(b,b)\alpha(h_{b,l}h_{b,r}^{-1})|$ — положительно определённая квадратичная форма на B и $B \subset T(H,1)(K)$ дискретно, то все тэта-функции сходящиеся, т.е. лежат в $An(H,\alpha)$.

В частности, если α унитарно, т.е. $|\alpha| = 1$, то условие положительности становится таким же, как в классическом случае. В p-адическом случае модуль p-адический. Тогда условие положительности то же самое, что возникает в теории p-адических тэта-функций.

Морально вы уже понимаете, что тип тэта-функций — это нечто вроде квантованного обратимого пучка на будущем абелевом многообразии, а $\Gamma(\mathcal{L})$ — нечто вроде квантованного пространства его сечений, реализованное после подъёма в накрывающее пространство. В классическом случае это верно буквально: если есть обратимый пучок, то у него есть подъём как тэта-тип, состоящий из двух компонент, а пространство его сечений превращается в пространство тэта-функций, удовлетворяющих определённому функциональному уравнению. Поэтому я выбрал обозначения так, чтобы они напоминали ситуацию в классическом случае.

Доказательство теоремы о квантовании условий положительности в достаточной мере тупое. Записывается функциональное уравнение и рассматриваются коэффициенты. Вы обнаруживаете, что на каждом представителе класса смежности H по $h^{-}(B)$ коэффициенты можно задать как угодно, а остальные функции по ним однозначно восстанавливаются. Стало быть, количество линейно независимых функций найдено. Затем нужно посмотреть, как восстанавливаются остальные функции. Они умножаются примерно на экспоненту плюс нечто, зависящее от b только линейно. Поэтому квадратичная часть должна обеспечивать убывание быстрее любой степени.

Теперь нужно сделать замечание об умножении. Пусть есть два тэта-типа (мультипликатора) $\mathcal{L} = \big(h_l, h_r, \psi, (\ ,\ )\big)$ и $\mathcal{L}' = \big(h'_l, h'_r, \psi', (\ ,\ )'\big)$. Предположим, что $h'_l = h_r$. Тогда их произведение определяется так: $\mathcal{L}\mathcal{L}' = \big(h_l, h'_r, \psi\psi', (\ ,\ )(\ ,\ )'\big)$. Утверждение состоит в том, что имеется частичное отображение $\Gamma(\mathcal{L}) \otimes \Gamma(\mathcal{L}') \to \Gamma(\mathcal{L}\mathcal{L}')$. Это наводит на мысль, что такое отображение является морфизмом в некоторой категории. К этому мы ещё вернёмся. Временно можно представлять себе, что сумма всех $\Gamma(\mathcal{L})$ — нечто вроде универсального градуированного кольца, связанного с абелевым многообразием. В данном случае есть только полукольцо. В классическом случае есть кольцо

$$\bigoplus_{\mathcal{L}} \Gamma(\mathcal{L}) \approx \bigoplus_{\alpha \in \operatorname{Pic} \mathcal{A}} \Gamma(\mathcal{A}, \alpha).$$

Более правильна интерпретация как морфизмов в некоторой категории, но у меня нет правильного определения объектов этой категории. Морфизмы есть, умножение тоже есть, а что такое объект категории, непонятно. Но нет никакого сомнения в том, что то, что здесь написано, является квантовой деформацией категории Пикара, связанной с абелевым многообразием.

1.3. Функториальные свойства тэта-функций

Морфизмы торов, совместимые с периодами, действуют на квантованные торы. Формулировка этого утверждения очевидна, а доказательство немножко занудное.

Начнём с морфизма накрывающих торов. В частности, он действует на характерах $F : T(H_2, \alpha_2) \to T(H_1, \alpha_1)$ и индуцирует морфизм $F^*\big(e_{H_1,\alpha_1}(h)\big) =$

$a_h\big(f(h)\big)$. Для коммутативных торов получаем морфизм $F^*\big(e_{H_1,1}(h)\big) = \big(f(h)\big)$ Предположим, что для коммутативных торов коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F : T(H_2, 1) & \longrightarrow & T(H_1, 1) \\ \bigcup & & \bigcup \\ B_2 & \xrightarrow{F} & B_1 \end{array}$$

т.е. морфизм совместим с периодами. В этой ситуации тэта-функции одного типа можно перетаскивать в тэта-функции другого типа при дополнительном предположении, что a_h — характер. Как вы помните, a_{h+g} отличается от $a_h a_g$ на некий множитель, равный ± 1, который я называл характеристикой морфизма. Мы предполагаем, что характеристика морфизма равна 1.

Утверждение 1.1. *Для системы $\mathcal{L}_1 = \big(h_l, h_r, \psi, (\ ,\ )\big)$, связанной с $T(H_1, \alpha_1)$ и B_1, морфизм F определяет обратный образ $\mathcal{L}_2 = F^*\mathcal{L}_1 = \big(h'_l, h'_r, \psi', (\ ,\ )'\big)$.*

Здесь $h'_{l,r}$ определяется коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{h_{l,r}} & H_1 \\ {\scriptstyle F}\big\uparrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ B_2 & \xrightarrow{h'_{l,r}} & H_2 \end{array}$$

т.е. $h'_{l,r} = f \circ h_{l,r} \circ F$. Другие элементы системы $\mathcal{L}_2$ определяются так: $\psi'(b) = \psi\big(F(b)\big)a_{h_{\overline{F(b)}}}$ и $(b_1, b_2)' = \big(F(b_1), f(b_2)\big)$.

Утверждение 1.2. а) *Система $\mathcal{L}_2$ — мультипликатор.*

б) *Если $\theta \in \Gamma(\mathcal{L}_1)$, то $F^*(\theta) \in \Gamma\big(F^*(\mathcal{L}_2)\big)$.*

1.4. Немного философии

То, о чём я рассказал, — базис, на котором можно играть в игру, довольно длинную. Можно взять вышеупомянутую статью Мамфорда. Значительный её кусок квантуется, и с помощью этой системы объектов и определений перетаскивается в некоммутативную область. Интересно, что при этом получится.

Вторая игра, в которую с этим можно играть, связана с тем, что когда есть некоммутативный тор и простые коммутационные соотношения $xy = qyx$, для них есть простые представления псевдодифференциальных операторов: умножение на x — это оператор умножения на экспоненту, а умножение на y — оператор умножения на экспоненту $\frac{\partial}{\partial x}$, т.е. сдвиг на 1. Обычно каждая некоммутативная теория существует в двух версиях: одна как некоммутативная, а другая как коверсия коммутативной теории. Классический пример — q-биномиальные коэффициенты. Их можно записать с помощью формулы бинома Ньютона, применённого к некоммутативным переменным:

$$(x+y)^n = \sum \binom{n}{i}_q x^i y^{n-i}, \qquad \text{где } xy = qyx.$$

С другой стороны, q-биномиальные коэффициенты можно записать, оставаясь в рамках коммутативной алгебры:

$$\prod (1 + q^n yx^{-1}) = \sum \binom{n}{i}_q (yx^{-1})^{n-i}.$$

Точно так же все эти алгебраические игры существуют в двух варианта: в некоммутативном, который я изложил, и в коммутативном, который получится, если все фигурирующие экспоненты заменить на соответствующие операторы, одна часть которых соответствует сдвигам, а другая — умножениям на экспоненту. Что за q-версии тэта-функций при этом получаются — интересный вопрос, который я совсем не изучал.

Наконец, третья игра, в которую можно играть, — сменить идеологию некоммутативной геометрии. Но прежде чем её менять, нужно понять, какая идеология некоммутативной геометрии была неявной здесь. Это была, конечно, деформационная идеология. Как и в примере, с которого я начал (что такое квантовое GL(2)?), мы начинаем с кольца функций на обыкновенной группе GL(2), затем вводим параметры деформации и плоским образом деформируем коммутативное кольцо в некоммутативное. Изначальная идеология здесь была такой же. У нас было универсальное градуированное кольцо, связанное с абелевым многообразием (прямая сумма сечений всех обратимых пучков). Я ввожу параметр деформации и начинаю деформировать умножение, пытаясь сохранить при этом какие-то разумные свойства.

В некоммутативной геометрии есть дополнительная идеология, связанная с именем Конна (Alain Connes). Эта идеология совсем не такая. Конн тоже работает с некоммутативными кольцами и модулями над ними. Значительная часть его теории связана, скорее, с некоммутативным функциональным анализом, чем с алгебраической геометрией. Но это не принципиально. Принципиален сдвиг в понимании того, как нужно связывать коммутативную геометрию с некоммутативной. Этот сдвиг связан в первую очередь с тем, что в некоммутативной геометрии возникает знаменитый эффект Морита, которого не было в коммутативной геометрии. Именно, категория модулей над коммутативным кольцом однозначно определяет это кольцо. Категория модулей над некоммутативным кольцом вовсе это кольцо однозначно не определяет.

В некоммутативной геометрии нет понятия функции на данном пространстве. Матрицы от функций на данном пространстве играют совершенно такую же роль, как сами функции. В любой глобальной версии мы теряем понятие структурного пучка. Стало быть, идеология деформаций и идеология Конна в некотором смысле несовместимы. В идеологии деформаций мы нажимаем на данное кольцо, на данный структурный пучок. Идеология деформаций совмещается с идеологией Конна, если мы будем деформировать не кольцо, а категорию модулей над этим кольцом; не многообразие, представленное каким-то коммутативным объектом, а категорию пучков на этом многообразии и т.п. Здесь есть свои подводные камни, потому что нет окончательных определений деформации категории и даже категории, которую нужно деформировать.

Я говорил, что частичное отображение $\Gamma(\mathcal{L}) \otimes \Gamma(\mathcal{L}') \to \Gamma(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ нужно рассматривать как морфизм в некоторой категории. Это открывает возможности для продумывания той же самой конструкции в рамках другой деформационной идеологии: у нас нет функций, а есть только пучки на воображаемом пространстве. Кроме того, это даёт возможность связать эту картину с очень интересными явлениями, которые давно известны в категории квантовых торов. Например, казалось бы, о двумерном квантовом торе

$$k[x, y, x^{-1}, y^{-1} \,|\, xy = qyx]$$

нельзя сказать ничего интересного. Но если мы рассмотрим

$$\operatorname{Spec} k[x, y, x^{-1}, y^{-1} \,|\, xy = qyx] = T_q,$$

где $q = e^{2\pi i\tau}$, $\tau \in \mathbb{R}$, то торы T_q и $T_{q'}$ Морита–эквивалентны тогда и только тогда, когда $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ (дробно–линейное преобразование с целыми коэффициентами). Это дробно–линейное преобразование является элементом модулярной группы. С классической точки зрения модулярная группа естественно действует на верхней полуплоскости. Таким образом получаем продолжение действия модулярной группы, действующей на верхней полуплоскости, имеющее чрезвычайно простой смысл. А именно, эквивалентность эллиптических кривых превращается в Морита–эквивалентность, когда мы садимся с верхней полуплоскости на вещественную ось. Таким образом, в некотором смысле слова сам тор является эллиптической кривой, у которой при мультипликативной униформизации решетка периодов становится недискретной. Когда $|q| \neq 1$, то получается настоящая эллиптическая кривая, точнее говоря, её представитель в мире некоммутативной геометрии. Когда же $|q| = 1$, получается чисто некоммутативный тор. Он является объектом, который морально эквивалентен предельной эллиптической кривой.

Тот эффект, что на пространствах модулей классических коммутативных объектов имеются граничные области, при приближении к которым мы, по-видимому, попадаем в мир некоммутативных объектов, сейчас становится всё более осознанным. Физики его давно поняли, а математики только сейчас начинают понимать. Есть очень интересная статья Капустина, Кузнецова и Орлова. Она связана с описанием аналогичных эффектов в пространстве модулей инстантонов.

Вообще, это явление широко распространено, и понимание того, что коммутативный мир и некоммутативный мир связаны не только посредством деформаций, но и посредством существования коридоров, по которым из коммутативного мира естественно попадаем в некоммутативный мир, было, вероятно, одним из самых интересных явлений, которые были осознаны математиками в последнее время (открыто это явление было уже лет 10 тому назад).

Более того, поскольку некоммутативный мир морально включает в себя коммутативный мир, то, вероятно, вся геометрия должна рассматриваться как некоммутативная. Нужно сделать глобальный пересмотр с некоммутативной точки зрения всего того, о чём мы привыкли думать в коммутативных терминах. Конечно, в коммутативной геометрии, в частности в алгебраической геометрии, есть очень сильная машина, которая позволяет справляться с многими задачами, которые плохо решает некоммутативная геометрия. Одна из основных задач — сделать факторы по плохим отношениям эквивалентностями. Алгебраические геометры справляются с этим, изучая стэки.

У меня такое ощущение, что переход к буквально некоммутативной точке зрения доставляет совершенно новую интуицию, очень важную и заслуживающую изучения. С этой точки зрения то, что я здесь делаю, если слегка обобщить термины, есть изучение не деформированных абелевых многообразий, а торов, отфакторизованных по очень скверным решёткам периодов, которые содержат сильную недискретную часть. Некоммутативность, по-видимому, — это способ уловить механизмы такой факторизации.