Письменный вступительный экзамен в аспирантуру[1]

Задача 1. Какое максимальное число векторов можно расположить в $\mathbb{R}^n$ так, чтобы все углы между ними были тупыми?

Задача 2. Участник телеигры пытается отгадать автомобиль, стоящий за одной из трёх закрытых дверей. Он наудачу указывает дверь, затем ведущий наугад открывает одну из двух оставшихся, и выясняется, что автомобиля за ней нет. После этого игроку предлагают сделать окончательный выбор. Что выгоднее: настаивать на первоначально указанной им двери или указать на другую? Какова будет вероятность успеха?

Задача 3. Опишите все группы из 27 элементов.

Задача 4. Сколько слагаемых достаточно сложить для вычисления $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ с точностью до 10^{-4}? Укажите какое-нибудь число, не обязательно минимальное.

Задача 5. Существует ли голоморфная в единичном круге функция f, такая что $f(0) = 1/2$, $f(1/2) = 7/8$ и $|f(z)| < 1$ при $|z| < 1$?

Задача 6. Приводим ли в $\mathbb{Z}[x]$ многочлен $x^p - x + a$, где p — простое число, не делящее a?

Задача 7. Сколько неособых кривых второго порядка на комплексной проективной плоскости касается пяти данных прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

Задача 8. Полугруппа преобразований метрического компакта X в себя порождается двумя сжимающими отображениями f_1, f_2, такими что $f_1(X) \cup f_2(X) = X$. Верно ли, что орбита любой точки всюду плотна?

Задача 9. Вещественный грассманиан $G(k,n)$ представляет собой многообразие всех k-мерных векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$. Какие вещественные грассманианы ориентируемы?

Задача 10. Найдите спектр оператора сдвига, действующего на пространстве бесконечных в обе стороны комплексных последовательностей (x_n) со скалярным произведением

$$\langle x\,,\,y\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \overline{y}_n e^{-|n|}$$

и переводящего последовательность (x_n) в последовательность (y_n) с $y_n = x_{n+1}$.

[1] Примечания. Продолжительность работы — 5 астрономических часов. Задачи можно решать в любом порядке. Решения должны быть ясно записаны. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Не забудьте *разборчиво подписать* и *сдать* Вашу работу, а также заполнить «Анкету поступающего в аспирантуру» и сдать её вместе с работой.