Письменный вступительный экзамен в аспирантуру[1]

Задача 1. Опишите с точностью до сопряжения все конечные подгруппы в группе $SO_3(\mathbb{R})$.

Задача 2. Углы α_1 и α_2, которые луч света образует с нормалью к поверхности, разделяющей две среды с показателями преломления η_1 и η_2 соответственно, связаны соотношением $\eta_1 \sin\alpha_1 = \eta_2 \sin\alpha_2$. Опишите и нарисуйте траектории световых лучей на плоскости (x, y) с показателем преломления $\eta(x, y) = 1/y$.

Задача 3. Единичный куб в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ ортогонально проектируют на случайную плоскость. Найдите математическое ожидание площади проекции.

Задача 4. Существует ли непрерывное отображение, ставящее в соответствие каждой прямой на вещественной проективной плоскости некоторую точку, лежащую на этой прямой?

Задача 5. Функция f голоморфна в области $D = \{z : |z| < 1\}$ и непрерывно продолжается на её замыкание. Может ли множество нулей f внутри D состоять из однократных нулей во всех точках вида $n/(n+1)$ с $n \in \mathbb{N}$?

Задача 6. Гомеоморфны ли кольца целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_3$ и $\mathbb{Z}_5$?

Задача 7. Обозначим через $\mathbb{P}_N$ пространство всех квадрик в $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ и рассмотрим алгебраическую гиперповерхность $V \subset \mathbb{P}_N$, состоящую из всех вырожденных квадрик. Докажите, что точка $q \in V$ неособа тогда и только тогда, когда соответствующая квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ имеет только одну особую точку $x \in \mathbb{P}_n$, причём касательная гиперплоскость $T_qV \subset \mathbb{P}_N$ состоит из всех квадрик $Q' \subset \mathbb{P}_n$, проходящих через x.

Задача 8. Группа Лоренца $SO(3,1)$ состоит из линейных операторов $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, сохраняющих стандартную ориентацию и квадратичную форму $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$. Постройте гомоморфизм групп Ли $SL_2(\mathbb{C}) \to SO(3,1)$, отождествляющий их алгебры Ли, и найдите число компонент связности и фундаментальную группу группы Лоренца.

Задача 9. Всякая ли конечная абелева группа является группой Галуа некоторого нормального расширения поля $\mathbb{Q}$?

Задача 10. Последовательность векторов (v_n) гильбертова пространства $\mathcal{H}$ *слабо сходится* к вектору v, если $\lim\limits_{n\to\infty} \langle v_m , w \rangle = \langle v , w \rangle \quad \forall w \in \mathcal{H}$. Опишите слабое замыкание множества функций, принимающих значения ± 1, в вещественном гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2([0, 1])$.

[1] Примечания. Продолжительность работы — 5 астрономических часов. Задачи можно решать в любом порядке. Решения должны быть ясно записаны. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Не забудьте *разборчиво подписать* и *сдать* Вашу работу, а также заполнить «Анкету поступающего в аспирантуру» и сдать её вместе с работой.