Письменный вступительный экзамен в аспирантуру[1]

Задача 1. Остаются ли на плоскости Лобачевкого в силе теоремы о пересечении высот и пересечении медиан произвольного треугольника?

Задача 2. На плоскости нарисован угол величиной $2\pi p/q$ ($p, q \in \mathbb{N}$ взаимно просты). При каких p и q его можно циркулем и линейкой разбить на 3 равные части?

Задача 3. На плоскости нарисованы 3 точки a, b, c ещё 2 точки p_1 и p_2, не лежащие на прямых (ab), (bc) и (ca). Обозначим через ℓ_1 проективную прямую, точками которой служат всевозможные прямые, проходящие через p_1, через ℓ_2 — проективную прямую, точки которой суть прямые, проходящие через p_2, и через $\gamma : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ — единственный дробно линейный изоморфизм, переводящий $(p_1a), (p_1b), (p_1c) \in \ell_1$, соответственно, в $(p_2a), (p_2b), (p_2c) \in \ell_2$. Опишите геометрическое место точек пересечения $x \cap \gamma(x)$ всех пар соответственных прямых $x \in \ell_1$ и $\gamma(x) \in \ell_2$.

Задача 4. Опишите все замкнутые орбиты естественного действия группы $SL_2(\mathbb{C})$ на проективизации её $(n+1)$–мерного неприводимого представления.

Задача 5. Вычислите кольцо когомологий $H^*(X, \mathbb{Z})$ пространства $X \subset \mathbb{C}^3$, заданного уравнением $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

Задача 6. Конечно ли множество различных подполей в $\mathbb{C}$, изоморфных полю $\mathbb{R}$?

Задача 7. Найдите производную решения дифференциального уравнения $\ddot{x} = \vartheta\, \dot{x}^2 + x$ с начальным условием $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ по параметру ϑ при $\vartheta = 0$.

Задача 8. Сколько существует гомотопических классов отображений сферы с двумя ручками в $\mathbb{RP}^3$?

Задача 9. Вычислите вариационную производную функционала $f \longmapsto \int\limits_B (df) \wedge (*\, df)$ на пространстве бесконечно гладких функций, определённых в некоторой окрестности единичного шара $B \subset \mathbb{R}^n$ (оператор Ходжа $* : \Lambda^k T^*\mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^{n-k} T^*\mathbb{R}^n$ строится по стандартной евклидовой метрике на $\mathbb{R}^n$).

Задача 10. Верно ли, что ряд $\sum\limits_{k \geqslant 1} a_k$ сходится для почти всех $(a_k) \in \mathbb{R}^\infty$ относительно произведения гауссовых мер $d\mu = \prod \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$? Найдите $\mu \left\{ (a_k) \mid \sum a_k^2 < \infty \right\}$. (напомним, что базис измеримых множеств меры μ составляют бесконечные произведения $X = \prod X_k$, в которых только конечное число X_k отлично от $\mathbb{R}$ и измеримо, и мера такого произведения равна произведению мер сомножителей.)

[1] Примечания. Продолжительность работы — 5 астрономических часов. Задачи можно решать в любом порядке. Решения должны быть ясно записаны. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Не забудьте *разборчиво подписать* и *сдать* Вашу работу, а также заполнить «Анкету поступающего в аспирантуру» и сдать её вместе с работой.