Независимый московский университет
Вступительный экзамен в аспирантуру
Время на работу — 4 часа; не обязательно решать все задачи.

1. Баскетболист Косоруков собирается сделать 100 бросков по кольцу. При первом броске он всегда попадает, при втором — всегда промахивается, а при каждом последующем броске вероятность попадания равна проценту попаданий при всех предыдущих бросках из этой серии. Какова вероятность того, что он попадет ровно 50 раз?

2. Пусть G — компактная топологическая группа. Рассмотрим ее конечномерное представление над полем p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ (т. е. непрерывный гомоморфизм $G \to GL(V)$, где V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{Q}_p$). Всегда ли это представление раскладывается в прямую сумму неприводимых?

3. Существует ли такое конформное отображение внутренности правильного треугольника на внутренность равнобедренного прямоугольного треугольника, что при соответствии границ вершины переходят в вершины?

4. Существуют ли нетривиальные вещественные векторные расслоения над трехмерной сферой?

5. Возможно ли равенство $\sqrt[3]{2} = a_1 \cos(b_1 \pi) + \ldots + a_n \cos(b_n \pi)$, где все числа a_j и b_j рациональны?

6. Пусть p — простое число. Рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^p & x_2^p & \ldots & x_n^p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{p^{n-1}} & x_2^{p^{n-1}} & \ldots & x_n^{p^{n-1}} \end{vmatrix}$$

как многочлен от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Докажите, что этот многочлен сравним по модулю p с произведением многочленов степени 1 с целыми коэффициентами.

7. Пусть F — однородный многочлен степени n с действительными коэффициентами. Для всякого целого числа $k \in [0; n]$ обозначим через V_k векторное пространство, порожденное всевозможными частными производными от F порядка k. Докажите, что $\dim V_k = \dim V_{n-k}$ для всякого $k \in [0; n]$.

8. Рассмотрим «уравнение физического маятника» $\ddot{x} = -\sin x$ с начальными условиями $x(0) = \theta$, $\dot{x}(0) = 0$; пусть $T(\theta)$ — период колебаний. Найдите асимптотику $T(\theta)$ при $\theta \to 0$ (до первого непостоянного члена включительно).