Независимый московский университет
Вступительный экзамен в аспирантуру

Время на работу — 4 часа;
не обязательно решать все задачи.

1. Сколько силовских p-подгрупп содержится в группе $Gl_n(\mathbb{F}_p)$ (p — простое число, $\mathbb{F}_p$ — поле из p элементов)?

2. Существуют ли такие гладкие функции $f_1, f_2, f_3\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, что множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$$

гомеоморфно вещественной проективной плоскости, причем в каждой точке $x \in X$ производные функций f_1, f_2 и f_3 линейно независимы?

3. Пусть X — сфера с тремя ручками и $Y = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^6$ — шестимерный тор. Можно ли вложить X в Y таким образом, чтобы это вложение индуцировало изоморфизм групп $H_1(X, \mathbb{Z})$ и $H_1(Y, \mathbb{Z})$?

4. На компактной римановой поверхности X выбрано k различных точек $p_1, \ldots, p_k$; дано k чисел $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что на X существует мероморфная функция f, для которой $\operatorname{ord}_{p_i}(f) = m_i$ при всех $i \in [1; k]$ (на нули и полюсы функции f в остальных точках никаких условий не накладывается).

5. Можно ли расположить на плоскости окружность и параболу таким образом, чтобы их пересечение состояло ровно из двух точек, в одной из которых окружность касалась бы параболы, а в другой — нет?

6. Обозначим через X фактор трехмерного тора

$$T = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1\}$$

по инволюции σ, действующей по правилу $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (-z_1, z_3, z_2)$. Найдите гомологии пространства X с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

7. На комплексной плоскости расположены такие выпуклые четырехугольники $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$, что $\angle A_i = \angle B_i$ для всех i и существует конформное отображение первого четырехугольника на второй, переводящее (при соответствии границ) A_i в B_i. Докажите, что четырехугольники подобны.

8. Для всякой ли непрерывной 2π-периодической комплекснозначной функции с рядом Фурье $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}$ существует непрерывная 2π-периодическая функция с рядом Фурье $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{in\theta}$?