Независимый московский университет
Вступительный экзамен в аспирантуру
Время на работу — 4 часа;
не обязательно решать все задачи.

1. Точки A, B и C лежат на графике функции $y = x^2$; нормали к графику, проведенные в этих точках, пересекаются в одной точке. Доказать, что центр тяжести треугольника ABC лежит на оси ординат.

2. Клетки прямоугольной доски размером $m \times n$ случайно и независимо одна от другой раскрашиваются в синий и красный цвета (каждая клетка становится красной или синей с вероятностью $1/2$). Доказать, что математическое ожидание числа одноцветных областей не меньше, чем $mn/8$. (Одноцветная область — максимальное множество одноцветных клеток, которое можно обойти ходом шахматной ладьи.)

3. Пусть a, b и c — кватернионы, причем $a \neq 0$. Доказать, что существует кватернион z, удовлетворяющий уравнению

$$az^2 + b\overline{z} + c = 0.$$

(Если $z = x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, то $\bar{z} = x - y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - t\mathbf{k}$.)

4. Пусть пространство X получается из трехмерной сферы склеиванием трех точек в одну.

а) Найти $\pi_1(X)$.

б) Найти кольцо целочисленных когомологий пространства X.

5. Пусть f — целая функция одного комплексного переменного. Докажите, что существует целая функция g, для которой $g(z+1) - g(z) = f(z)$ при всех z.

6. Описать все ассоциативные подалгебры (с единицей) $A \subset \mathrm{Mat}_{6\times 6}(\mathbb{R})$, для которых $\dim_{\mathbb{R}} A > 31$.

7. Существует ли риманова поверхность рода 2 с диагональной матрицей периодов?