Независимый московский университет
Вступительный экзамен в аспирантуру

Время на работу — 4 часа;

не обязательно решать все задачи.

1. Конечная группа G транзитивно действует на множестве S, содержащем более одного элемента. Докажите, что найдется элемент $g \in G$, действующий на S без неподвижных точек.

2. Функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ставит в соответствие точке $p \in \mathbb{R}^n$ ее предмаксимальную по величине координату (если $p = (x_1, \ldots, x_n)$ и $x_{i_1} \leqslant x_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant x_{i_n}$, то $\varphi(p) = x_{i_{n-1}}$). Положим

$$I = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \quad \text{для всех } i\}.$$

Найдите $\int_I \varphi(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$.

3. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — действительные числа; положим $a_{ij} = \cos(x_i - x_j)$. Покажите, что определитель матрицы $\|a_{ij}\|$ неотрицателен.

4. Для каких m и n произведение двух сфер $S^m \times S^n$ можно вложить в $\mathbb{R}^{m+n+1}$?

5. Найдите сумму

$$\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ + \operatorname{tg} 9^\circ + \ldots + \operatorname{tg} 177^\circ.$$

6. Сколько, с точностью до изоморфизма, существует абелевых групп A, которые могут быть включены в точную последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \to A \to \mathbb{Z}/6000\mathbb{Z} \to 0?$$

7. Подмножество $X \subset \mathbb{CP}^3$ задается уравнением $z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 = 0$, где $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$ — однородные координаты в комплексном проективном пространстве. Найдите кольцо когомологий $H^*(X, \mathbb{Z})$.

8. Существуют ли в кольце непрерывных вещественнозначных функций на отрезке простые идеалы, не являющиеся максимальными? (От идеалов не требуется замкнутость в какой бы то ни было топологии.)