Независимый московский университет
Вступительный экзамен в аспирантуру

Время на работу — 4 часа;
не обязательно решать все задачи.

1. Существует ли непрерывное и взаимно однозначное отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$?

2. Пусть x_n — наименьший положительный корень уравнения $\cos x = nx$ (где n — целое положительное число). Найдите три первых непостоянных члена асимптотического разложения x_n при $n \to \infty$.

3. Обозначим через $|\cdot|$ стандартную евклидову метрику в $\mathbb{R}^{n+1}$; пусть S^n и B^{n+1} — единичная сфера и замкнутый единичный шар с центром в начале координат относительно этой метрики. Докажите, что если $f\colon B^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ — непрерывное отображение, обладающее тем свойством, что $|f(x) - x| < 1$ для всех $x \in S^n$, то $f(B^{n+1})$ содержит окрестность начала координат.

4. Пусть $\varphi = 2\pi/11$. Найдите

$$\sin\varphi - \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \sin 4\varphi + \sin 5\varphi.$$

5. Пусть $SO_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ — множество всех ортогональных матриц с определителем 1. Существует ли в $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ аффинная гиперплоскость, содержащая $SO_n(\mathbb{R})$?

6. Пусть T — двумерный тор (произведение двух окружностей) и X — фактор $T \times T$ по отношению эквивалентности $(p,q) \sim (q,p)$. Найдите $H^i(X,\mathbb{Z})$ для всех i.

7. Пусть D — некоммутативное тело и $K \subset D$ — его центр.

а) Покажите, что размерность D как векторного пространства над K не может быть меньше 4.

б) Пусть $\dim_K D = 4$. Покажите, что существует такой автоморфизм $\varphi\colon D \to D$ (векторных пространств над K), что $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$ для всех $x, y \in D$.

8. Существует ли в $\mathbb{C}^2$ замкнутое одномерное комплексно-аналитическое подмногообразие, изоморфное единичному кругу на комплексной плоскости?