Вступительный экзамен в аспирантуру НМУ

19 сентября 1993 года

1. Вычислить $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-10t}}{1+t}\,dt$ с относительной погрешностью не более 5%.

2. Найти все решения дифференциального уравнения $x'' + x = \delta(t-1)$.

3. Группа G всех целочисленных векторов на плоскости относительно сложения содержит подгруппу H, состоящую из векторов с четными координатами, сумма которых делится на 12. (а) Найти порядок факторгруппы G/H. (б) Найти разложение факторгруппы G/H в прямую сумму циклических групп.

4. Отображение $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ задано формулой $f(x) = \dfrac{4}{3^{3/4}} z^3 - z^4$. Нарисовать на комплексной прямой прообраз отрезка $[0,1]$ при этом отображении.

5. Существует ли конформное отображение квадрата на прямоугольник, переводящее вершины в вершины?

6. Вычислить относительные гомологии с коэффициентами в $\mathbb{R}$ множества $F^{-1}(-\infty, 100]$ по модулю множества $F^{-1}(-\infty, -100]$ для функции $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, заданной формулой $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 5yz$.

7. Найти норму функционала $I_\alpha\colon L_p[0,1] \to \mathbb{R}$, заданного формулой

$$I_\alpha(f) = \int_0^1 x^\alpha f(x)\,dx.$$

8. При каких α функция $x^6+y^6+x^2y^2+\alpha xy^4+xy^6$ на вещественной плоскости имеет в начале координат точку минимума?

9. Исследовать поведение при $t \to \infty$ решений системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2\sin y - y - x. \end{cases}$$

10. В пространстве многочленов степени не выше 7 над полем характеристики 2 действует оператор сдвига $p(x) \mapsto p(x+1)$. Найти жорданову нормальную форму этого оператора.

26 сентября 1993 года

Абитуриентам предлагалось выбрать две задачи и решить их, а также написать полные формулировки двух теорем, представляющих два прослушанных ими специальных курса, или одну такую теорему и один собственный результат абитуриента.

1. Найти группу Галуа поля разложения многочлена $x^4 - 2$ над полем рациональных чисел.

2. Пусть G — дискретная группа, $R = \mathbb{Q}[G]$ — ее групповое кольцо над $\mathbb{Q}$. Рассмотрим $\mathbb{Q}$ как R-модуль с тривиальным действием G. Докажите, что

$$\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Tor}_i^R(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Ext}_R^i(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$$

для всех целых i.

3. Пусть P^5 — проективизация пространства симметрических (3×3)-матриц и $X \subset P^5$ состоит из матриц ранга 1. Покажите, что X есть алгебраическое подмногообразие, изоморфное P^2, и что X имеет степень 4 («общее» линейное подмногообразие коразмерности 2 пересекает X в четырех точках).

4. Кривая C на комплексной плоскости задана уравнением $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ в однородных координатах $(x : y : z)$. Выпишите в явном виде базис пространства голоморфных дифференциальных форм (дифференциалов первого рода) на C.

5. Доказать, что целые функции f и g на комплексной плоскости, удовлетворяющие тождеству $f(z)^2 = g(z)^6 - 1$, постоянны.

6. Пусть M — замкнутая ориентируемая поверхность, снабженная римановой метрикой постоянной кривизны. На поверхности проведена замкнутая геодезическая, разбивающая M на две части. Доказать, что отношение площадей этих частей является рациональным числом.

7. Вычислите де Рамовские когомологии n-мерного тора непосредственно, не прибегая к теоремам сравнения.

8. Пусть $d\mu$ — инвариантная мера на группе $SU(3)$, для которой объем фундаментального параллелограмма решетки весов равен 1. Чему равен объем самой группы относительно этой меры?

9. Пусть A и B — две положительно определенные симметрические вещественные матрицы размера $n\times n$. Доказать, что у матрицы AB все собственные значения вещественны и положительны.

10. Доказать, что ограниченная последовательность элементов сепарабельного гильбертова пространства имеет слабо сходящуюся подпоследовательность.