Вступительный экзамен в аспирантуру НМУ

2 октября 1994 года

1. Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — симметрический оператор без кратных собственных чисел. Докажите, что поверхности

$$((A-\lambda E)^{-1}x, x) = 1,$$

проходящие через данную точку x_0 и соответствующие различным значениям параметра λ, попарно ортогональны.

2. (a) Постройте для многочлена $f(x) = x^2 - x$ такой дифференциальный оператор $P(x,n) = p_0(x,n) + p_1(x,n)\frac{d}{dx} + \ldots + p_k(x,n)\frac{d^k}{dx^k}$ и такой ненулевой многочлен $b = b(n)$, что

$$P \circ f^n = b(n) f^{n-1};$$

(б) Выберите P и b так, чтобы степень b была наименьшей.

3. Две точки на плоскости на расстоянии 1 друг от друга соединены 4-звенной ломаной, каждое из звеньев которой имеет длину $l > 1/4$. Докажите, что существует такое число a, что при $l < a$ пространство возможных положений ломаной гомеоморфно сфере, а при $l > a$ — тору.

4. Пусть $F(x,y) = x^4 - 5x^2y^3 + y^6$. Докажите, что у векторного поля $\operatorname{grad} F$ существует непрерывная траектория, выходящая из множества $F^{-1}(1)$ и входящая в точку 0. Сколько непрерывных производных в точке 0 может иметь такая траектория?

5. Каков спектр оператора сдвига $T\colon \{x_n\} \mapsto \{x_{n+1}\}$

(а) в пространстве двусторонних последовательностей $n \in \mathbb{Z}$,

(б) в пространстве односторонних последовательностей $n \geqslant 1$ суммируемых с квадратом?

6. Вычислите с относительной погрешностью не более 10%

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(100(x^4 - x))\,dx.$$

7. Докажите, что величина телесного угла, опирающегося на данный замкнутый контур, — гармоническая вне контура функция вершины угла.

8. Найдите группу симметрии уравнения $\Delta u = \sin x + \sin y + \sin z$.

9. Открытый треугольник T представлен как пересечение полуплоскостей Π_1, Π_2, Π_3. Функция φ аналитична в T и непрерывна вплоть до границы. Можно ли представить ее в виде суммы трех функций, голоморфных в полуплоскостях?

10. На какое минимальное число треугольников можно разрезать замкнутую ориентируемую поверхность рода g?