Вступительный экзамен в аспирантуру НМУ

1 октября 1995 года

1. Линейное уравнение $x = Ax + f$, $x, f \in \mathbb{R}^n$; $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ решается последовательностью итераций $x_{n+1} = Ax_n + f$. Докажите, что если все собственные числа матрицы A равны нулю, то при любом начальном условии $x_0 \in \mathbb{R}^n$ решение уравнения можно получить за конечное число итераций.

2. Три прямые в $\mathbb{R}^3$ находятся в общем положении (т. е. никакие две из них не лежат в одной плоскости, и не существует плоскости, параллельной всем трем прямым). Найдите число прямых, пересекающих все три выбранные прямые.

3. Опишите структуру кольца в пространстве когомологий де Рама трехмерного тора $H^*(T^3, \mathbb{R})$.

4. Найдите объем кривой Ферма $x_1^n + x_2^n + x_3^n = 0$ в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ относительно метрики, заданной формулой

$$ds^2 = \frac{\sum_{i=1}^3 |dx_i|^2}{1 + |x|^2} - \left| \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i}{1 + |x|^2} \right|^2.$$

5. Найдите индекс особой точки 0 векторного поля $\mathrm{grad}\, f$, если $f(x, y) = x^4 - x^2y^2 + y^5$.

6. На $\mathbb{R}^6$ группа S_3 перестановок из трех элементов действует следующим образом. Элементы базиса в $\mathbb{R}^6$ занумерованы элементами группы S_3, и каждый элемент группы S_3 действует на номере базисного вектора умножением слева. Разложите пространство $\mathbb{R}^6$ на неприводимые подпространства относительно этого действия.

7. Существует ли непрерывная функция $\varphi\colon \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1$, такая что всюду в единичном круге

$$|\varphi(z) - \sqrt{z}| \leqslant \frac{\pi}{4}?$$

8. Пусть $P = P(z)$ — комплексный многочлен от одной переменной. Докажите, что все корни его производной $P'(z)$ лежат в выпуклой оболочке корней многочлена P.

9. Существуют ли две такие функции $S^1 \to \mathbb{R}$, что для любых двух точек $x_1, x_2 \in S^1$ и любых двух чисел $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ существует линейная комбинация этих функций, равная a_1 в точке x_1 и a_2 в

точке x_2? Ответьте на тот же вопрос для случая трех функций и трех точек.

10. Вычислите интеграл Гаусса

$$\iint \frac{(dx, dy, x-y)}{|x-y|^3},$$

где точка x пробегает кривую $x_1 = \cos\alpha$, $x_2 = \sin\alpha$, $x_3 = 0$, а точка y — кривую $x_1 = 2\cos^2\beta$, $x_2 = \frac{1}{2}\sin\beta$, $x_3 = \sin 2\beta$.