Вступительный экзамен в аспирантуру НМУ

22 октября 1996 года

1. На плоскости расположено несколько попарно непараллельных прямых. Найдите их число, если известно, что число двойных точек их пересечения равно α_2, число тройных точек равно α_3, ... , число точек n-кратного пересечения равно α_n.

2. Найдите третий ненулевой член асимптотики в разложении y как функции от x в окрестности нуля для x и y, связанных уравнением $x^5 + x^2y^2 = y^6$.

3. Опишите все целые функции f одной комплексной переменной, для которых $|f(z)|$ зависит только от $|z|$.

4. Пересекаются ли в одной точке (а) медианы; (б) высоты треугольника на плоскости Лобачевского?

5. Найдите все точки в $\mathbb{R}^3$, через которые нельзя провести двумерную поверхность, касающуюся пары векторных полей

$$v_1 = (xy, z^2 - x^2, -yz),$$
$$v_2 = (yz, x(z-y), -xy).$$

6. Найдите сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(\sin nx/n)$ как обобщенную функцию на прямой.

7. Пусть $p = p(x)$ — вещественный многочлен степени n от одной переменной. Найдите когомологии комплекса де Рама, в котором 0-формы — это функции на прямой вида $f(x)e^{p(x)}$, а 1-формы имеют вид $f(x)e^{p(x)}dx$, $f \in \mathbb{R}[x]$.

8. Гладкая замкнутая комплексная кривая называется гиперэллиптической, если она изоморфна кривой в $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, задаваемой уравнением $y^2 = p(x)$, где p — многочлен с различными корнями. Какова размерность пространства гиперэллиптических кривых рода g?

9. Пусть $\mathcal{B}_2$ — линейное пространство билинейных форм на $\mathbb{C}^2$. Группа $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ действует на $\mathcal{B}_2$ по правилу: $(Af)(x,y) = f(A^{-1}x, A^{-1}y)$, где $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, $f \in \mathcal{B}_2$. Опишите инвариантные подпространства этого действия.

10. Матрица размером $n \times n$ вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

называется циклическим блоком. Пусть матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где матрицы A и B — циклические блоки и их характеристические многочлены взаимно просты. Докажите, что в некотором базисе матрица C является циклическим блоком.